學術論著

不動產逆向抵押貸款評價與提前解約之分析

Analyzing the Pricing and Termination of Reverse Mortgages

王文楷*

Wen-Kai Wang*

摘要

我國自2013年3月1日開始試辦不動產逆向抵押貸款(reverse mortgage, RM)以來，國人對此類商品漸漸熟悉，越來越多的金融機構也開始推出RM合約。RM合約的相關研究，包含了如計價避險、社會福利或保險以及法規等不同方面的討論。本研究以計價方面為討論主軸，建構一評價模型，探討我國RM合約評價問題。本文目的除了評價RM合約價值，也利用實質選擇權理論(real option theory)分析發生提前解約的最佳條件為何。本文之貢獻除了對RM合約提出不同訂價的觀點外，也提供提前解約時最低房價方便的估計方式。實證顯示，RM合約生效初期提前解約的門檻偏低，造成提前解約的可能性較高。

關鍵詞：計價問題、實質選擇權、不動產逆向抵押貸款、提前解約

ABSTRACT

Following the government of Taiwan's introduction of the concept of the reverse mortgage (RM), RMs have become available and been noticed in Taiwan since March 1st, 2013. Several financial institutions in Taiwan have also introduced different types of RMs. Studies on RMs mainly focus on pricing and hedging, the social-welfare effect, and policies. In this study, we establish a model to price RMs. In addition, we apply real option theory to estimate the optimal conditions under which a borrower should terminate a RM. This study provides a different analysis in terms of pricing an RM, and estimates the optimal house price at which the RM should be terminated. The empirical evidence shows that the likelihood of an RM being terminated is higher at the beginning of the duration of the contract.

Key words: pricing problems, real options, reverse mortgage, termination of contract

一、前言與文獻介紹

近年來全球的少子化問題日趨嚴重，尤其我國的出生率與其他國家相較屬於偏低。少子化除了帶來勞動力短缺的衝擊外，也造成了獨居長者生活照顧問題。對於膝下無子女之長者，在無後足夠儲蓄或是代子女支援之下，可能面臨生活上的經濟困境。即便長者擁有房

(本文於2018年10月22日收稿，2019年1月7日審查通過，實際出版日期2019年12月)

* 國立高雄大學金融與管理學系助理教授

Assistant Professor, Department of Finance, National University of Kaohsiung, Kaohsiung, Taiwan.

E-mail: wkwang@nuk.edu.tw

產，在不便出售或不易出租之情形下，也無法利用該房產獲得穩定的現金流。因應此問題，我國政府自2013年3月1日開始推行“不動產逆向抵押貸款試辦方案”。RM合約的概念可回溯至1960年代，經過數十年的發展，已成為一種重要的貸款模式。除了在歐美各國盛行之外，亞洲國家如日本和新加坡等，也都積極推出相關的商品。台灣也在這幾年的發展後，陸續出現不同金融機構推行RM相關商品。

RM合約的概念可用“以房養老”四字形容。由長者向銀行抵押房產，換取穩定的現金流以維持生活。我國在開始試辦RM業務時，相關的條件限制包含：借方年齡、國籍、無法定繼承人、所抵押之房產條件等。由於國人受“有土斯有財”觀念影響，初期對於申辦RM相關商品較持保留態度。但隨著近年來觀念的改變，以及越來越多金融機構推出相關商品，國人對RM合約已有較高的接受度。而RM合約的年金給付方式，也有不同的選擇，包含：一次性全額領取、定期年金領取以及終身年金領取等。而在試辦初期，RM合約不可提前解約。但在相關商品多樣化之後，法定繼承人可繼承房產剩餘價值和提前解約皆有可能。

有關RM的探討，可依照討論方向分類過去文獻。依照借方角度分析市場需求容納量或年金領取效益的文獻有Venti & Wise(1991)、Merrill et al.(1994)、鍾俊文與游欣霓(2007)、黃泓智等(2008)、王儷玲等(2011)等。另一方面，Stucki(2006)、Davidoff(2009)、周台龍與鄭文輝(2008)等，則是以社會福利角度探討。本文所探討的方向為計價方面。主要原因為RM合約的計價會直接影響到借貸雙方交易此約合的意願。另一方面，由於RM合約存續期間較長，因此錯誤的計價可能導致借方或貸方在未來的極大損失。例如，借方所能領取的年金被低估，無法發揮RM合約之功能；或是貸方給付過高的年金，進而造成未來年金給付之困難，甚至出現違約風險發生的可能性。

由於RM合約受到房價、利率以及借方存活機率等因素影響，在計價時必須要將這些因素考慮進來。而又因為計價需要採用數學模型，因此必須利用適當的方程式來模擬這些因素的變動。在房價方面，採用離散時間模型模擬房價的文獻包含：Chen et al.(2010a)與Lee et al.(2012)利用ARMA-GARCH模型、Li et al.(2010)使用ARMA-EGARCH模型。另一方面，部分文獻採用連續時間模型模擬房價變化。傳統文獻中，多採用幾何布朗運動(geometric Brownian motion, GBM)模擬房價，例如：Kau et al.(1992; 1993; 1995)、Szymanoski(1994)、Kau & Keenan(1995; 1999)、Yang et al.(1998)、Ma et al.(2007)以及Chen et al.(2010b)以及Huang et al.(2011)。採用GBM的一個優點，在於GBM的形式相對簡單。另一方面，由於在計算公允價格，即無套利價格時，須採用風險中立機率，GBM在轉換機率測度(probability measure)時，複雜度較低。並且，相較於其它隨機過程，GBM的參數在估計上也較容易。因此GBM在理論分析和實務應用上，仍有其一定的重要性。另一方面，由於GBM為連續的隨機過程，無法模擬實務上房價發生突然崩跌的現象。因此有部分文獻在模擬房價時，採用GBM加上卜松過程(Poisson process)。例如Lee et al.(2012)。

有關利率方面，由於RM合約相對於部分衍生性商品的存續期間更長，對於利率的假設，理想上應採用隨機利率模型。過去文獻中，隨機利率相關的數學模型包含：Vasicek(1977)、Cox et al.(1985)以及Hull-White模型等。在Chen et al.(2010b)中，作者採用了Cox et al.(1985)的利率模型來模擬利率。而在Ma et al.(2007)中，作者則是採用了Vasicek(1977)的模型模擬利率。然而如上述所言，這兩篇文獻已先採用了GBM模擬房價，加上採用隨機過程模擬利率，造成

數學模型中牽涉至少兩條隨機微分方程(stochastic differential equation, SDE)，這類的模型一般在求解上非常困難。故這兩篇文章中的分析，都採用數值模擬方式。前者利用了有限差分法(finite difference method)，而後者則採用了蒙地卡羅法(Monte Carlo method)。因此雖然上述模型相較於固定利率模型較為精確，然而在實務上的應用，所受到的限制也可能較大。而在Lee et al.(2012)中，作者是利用Cox et al.(1985)模擬利率，並且提出了封閉解(closed solution)的近似方法。最後，在借方存活機率部分，文獻大多利用Lee & Carter(1992)估計死亡率的模型，例如：Huang et al.(2011)以及陳勤明等(2017)。

由於陳勤明等(2017)的RM評價模型得到RM合約價值的封閉解，在實務上有相當大的應用性，本文因此利用並延伸陳勤明等(2017)的模型，重新探討RM合約評價問題。在該模型中，作者假設借方所領取之年金為一固定值，並且加入可續住房產的權利，計算生存給付。另外，作者也考慮借方死亡時，房產剩餘價值可繼承的因素。因此利用Black & Scholes(1973)的買權計價公式，計算房產剩餘價值。本文延伸其概念，重新計算RM合約價值，而本文中所探討的RM合約，是以放寬房屋剩餘價值繼承為主。實證結果顯示，在與陳勤明等(2017)模型相同假設下，我們的RM合約評價之結果較低。另外，在RM合約不限制提前解約之下，我們提供估計提前解約條件的簡單公式。實證結果顯示，若不限制提前解約，RM合約在生效初期時發生提前解約的門檻偏低，因此貸方可能面臨較高的提前解約風險。

本文的撰寫結構如下：第二節介紹如何延伸陳勤明等(2017)之評價模型，並且推導利用本研究評價模型所得到的RM合約價值封閉解。除此之外，也分析允許提前解約的狀況和求解提前解約的門檻條件，並介紹估計提前解約門檻所需要的假設。第三節針對第二節的結果進行敏感度分析。第四節中選定各參數數值實際進行計算。最後，第五節提供本研究所得之結論與建議。

二、評價模型與提前解約之條件

本節介紹如何延伸陳勤明等(2017)之評價模型，並對RM重新評價。並且分析在提前解約須給付違約金下，借方應在何種條件下提前解約。我們先於表一中定義建構模型所使用的部分參數，後續建構模型時仍會提及。

表一 部分符號解釋

符號	解釋
r	無風險年利率
μ	房價年成長率
δ	房價折舊率
σ	房價波動度
α	年金給付率
β	房租收益率
ρ	貸款利率
C	提前解約時的違約金

根據陳勤明等(2017)之評價模型，我們假設 t 時房價 $x(t)$ 服從下列GBM：

$$dx(t) = (\mu - \delta)x(t)dt + \sigma x(t)dW(t), \dots\dots\dots (1)$$

其中 μ 為房價年平均成長率、 δ 為房價折舊率、 $\sigma > 0$ 為房價波動度、 $W(t)$ 為衛納過程(Wiener process)。陳勤明等(2017)認為，借方生存期間擁有房產續住權，以及考慮死亡時房產繼承權因素，貸款於 t 時之利益 $B(t)$ 應表示為：

$$B(t) = \begin{cases} LB(t), & \text{if } t < \tau \\ DB(t), & \text{if } t = \tau \end{cases}, \dots\dots\dots (2)$$

其中 τ 為借方死亡時間。 $LB(t)$ 和 $DB(t)$ 分別為借方之生存給付與死亡給付。對於死亡時間 τ ，與陳勤明等(2017)之評價模型不同之處，在於我們的模型放寬 τ 為貸款期間之年度期末之假設。在我們的模型中，死亡時間為任意時間。因此，我們的模型為一連續時間模型。

關於上述的生存給付，根據陳勤明等(2017)，借方將獲得年金給付以及續住權利，而續住權利之價值由租金收益表示。假設 $t = 0$ 為不動產逆向抵押貸款合約起始時間。並假設借方所收受之年金金額，為房價於合約起始時間之固定比例，即 $\alpha x(0)$ ，其中 $\alpha > 0$ ，且房屋租金為房價之固定比列，即 $\beta x(t)$ ，其中 $\beta > 0$ ，則時之生存給付為：

$$LB(t) = \alpha x(0) + \beta x(t). \dots\dots\dots (3)$$

另一方面，在 τ 時，由於借方繼承人可繼承房產剩餘價值，在房價高於年金累積價值時，借方繼承人可得到死亡給付金。若房價低於年金累積價值，則借方繼承人無法得到死亡給付金。令 r 為無風險年利率且 $\rho > r$ 為貸款利率，則至借方死亡時的年金累積價值為：

$$\int_0^\tau e^{\rho t} \alpha x(0) dt = \frac{\alpha x(0)}{\rho} (e^{\rho \tau} - 1). \dots\dots\dots (4)$$

因此，死亡給付之計算為：

$$DB(t) = \max \left\{ x(\tau) - \frac{\alpha x(0)}{\rho} (e^{\rho \tau} - 1), 0 \right\}. \dots\dots\dots (5)$$

在給定 τ 之下，年金累積價值為已知。因此死亡給付之計算，如同歐式買權(European call option)之到期報酬。

為了求得不動產逆向抵押貸款之公允價值，我們利用風險中立計價法(risk-neutral valuation)。首先利用Girsanov轉換(Girsanov transformation)，先將式(1)轉換成風險中立機率測度(risk-neutral probability measure)下的GBM：

$$dx(t) = (r - \delta)x(t)dt + \sigma x(t)dW^*(t), \dots\dots\dots (6)$$

其中 $W^*(t) = W(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ 為風險中立機率測度下的衛納過程。在給定 τ 之下，RM合約於 t 時價值之計算為：

$$V(t, x) = E \left\{ \int_t^\tau e^{-r(s-t)} LB(s) ds + e^{-r(\tau-t)} DB(\tau) \mid x(t) = x \right\}, \dots\dots\dots (7)$$

其中 $E\{\cdot \mid \cdot\}$ 為風險中立測度機率下的條件期望值算子，且限制式為式(6)。式(7)的計算可分解為兩部分：一為生存給付之折現累積價值，另一則為死亡給付之折現價值。令：

$$V(t, x) = V_L(t, x) + V_D(t, x), \dots\dots\dots (8)$$

其中：

$$V_L(t, x) = E \left\{ \int_t^\tau e^{-r(s-t)} LB(s) ds \mid x(t) = x \right\}, \dots\dots\dots (9)$$

和：

$$V_D(t, x) = e^{-r(\tau-t)} E \{ DB(\tau) \mid x(t) = x \}. \dots\dots\dots (10)$$

根據Bellman原則(Bellman principle)， $V_L(t, x)$ 滿足下列Hamilton-Jacobi-Bellman方程式(HJB equation)：

$$\begin{aligned} & rV_L(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} V_L(t, x) \\ & = \alpha x(0) + \beta x + (r - \delta)x \frac{\partial}{\partial x} V_L(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_L(t, x) \end{aligned}, \dots\dots\dots (11)$$

並且 $V_L(t, x) = 0$ 。

上述式(9)之解在條件 $V_L(t, x) = 0$ 之下為 $V_L(t, x) = A(t)x + B(t)$ ，其中 $A(\tau) = B(\tau) = 0$ 。將解帶入式(11)可得到：

$$r(A(t)x + B(t)) - (A'(t)x + B'(t)) = \alpha x(0) + \beta x + (r - \delta)A(t)x. \dots\dots\dots (12)$$

比較係數之後，可得到下列微分方程：

$$A'(t) = \delta A(t) - \beta, \dots\dots\dots (13)$$

和

$$B'(t) = rB(t) - \alpha x(0). \dots\dots\dots (14)$$

求解式(13)和式(14)可得到：

$$A(t) = \frac{\beta}{\delta} [1 - e^{-\delta(\tau-t)}] \text{ 以及 } B(t) = \frac{\alpha x(0)}{r} [1 - e^{-r(\tau-t)}] \text{。} \dots\dots\dots (15)$$

最後，關於死亡給付之價值，由於其與歐式買權之報酬具有相同型式，因此其與標的股票給付股票股息之Black-Scholes買權計價公式相同，即：

$$V_D(t, x) = e^{-\delta(\tau-t)} x N(d_1(\tau)) - e^{-r(\tau-t)} \frac{e^{\rho\tau} - 1}{\rho} \alpha x(0) N(d_2(\tau)) \text{，} \dots\dots\dots (16)$$

其中：

$$d_1(\tau) = \frac{\ln\left(\frac{\rho x}{(e^{\rho\tau} - 1)\alpha x(0)}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}} \text{，} \dots\dots\dots (17)$$

$$d_2(\tau) = d_1(\tau) - \sigma\sqrt{\tau - t} \text{，} \dots\dots\dots (18)$$

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{。} \dots\dots\dots (19)$$

目前為止的分析皆是建立在死亡時間 τ 給定時，RM合約價值應為何。然而死亡時間應為隨機。我們假設RM合約起始時，借方為 γ 歲，並將當時時間訂為 $t = 0$ 。定義 $s(t; \gamma)$ 為借方存活到 t 時之生存函數。則 t 時之死力(force of mortality)為：

$$m(t; \gamma) = -\frac{s'(t; \gamma)}{s(t; \gamma)} \text{。} \dots\dots\dots (20)$$

因此，生存至 t 時並瞬間死亡於 t 時的機率為 $s(t; \gamma)m(t; \gamma)dt = -s'(t; \gamma)dt$ 。故RM合約之起始價值為：

$$\begin{aligned} VRM = & -\int_0^{\infty} \left[\frac{\beta x(0)}{\delta} (1 - e^{-\delta\tau}) + \frac{\alpha x(0)}{r} (1 - e^{-r\tau}) \right] s'(\tau; \gamma) d\tau \\ & - \int_0^{\infty} \left(e^{-\delta\tau} x(0) N(d_1(\tau)) - e^{-r\tau} \frac{e^{\rho\tau} - 1}{\rho} \alpha x(0) N(d_2(\tau)) \right) s'(\tau; \gamma) d\tau \text{。} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

比較式(21)與陳勤明等(2017)中式(6)，可以發現除了對時間之假設為連續和離散之不同外，對於生存給付的價值計算也有不同。在陳勤明等(2017)中，生存給付只計算於 t 時所獲得之期望年金給付與租金收益；而在本模型中，則是計算期間借方的期望累積折現年金與租金收益。而在死亡給付方面，本文計算期望價值時是採用借方必須活到 τ 時並且於 τ 時死亡，這與陳勤明等(2017)之計算方式也不同。

我們接下來考慮RM合約提前解約之情況。在數學上，這類問題為實質選擇權(real option)問題，該類問題可轉換成偏微分方程(partial differential equation, PDE)的自由邊界問題(free boundary problem)。然而，求解此類問題的解析解(analytical solution)相當困難，因此多半採用數值方法求解，如樹狀圖模型(lattice model)或是有限差分法(finite difference method)。在實務上提前解約發生時，借方可取回房產，並償還已領取年金與利息，以及繳付違約金。然而要精確估算提前解約條件，也應考慮借方因提前解約而損失的價值，其價值為RM合約剩餘價值。RM合約價值由生存給付和死亡給付組成，而生存給付又包含年金給付和房租收益。由於可提前解約，我們認為死亡給付不在借方考量的損失價值之中。另一方面，不管是否執行提前解約，借方皆有居住原屋的權利，故房租收益亦非應考量的損失價值。而年金給付則因為提前解約而停止。因此若提前解約於 t 時發生，借方的價值應為：

$$F(t, x) = \begin{cases} x - \frac{\alpha x(0)}{\rho}(e^{\rho t} - 1) + \int_t^{\infty} \frac{\alpha x(0)}{r}(1 - e^{-r(z-t)})s'(z; \gamma) dz - C, & \text{if } t < \tau \\ 0, & \text{if } t \geq \tau \end{cases}, \dots\dots\dots (22)$$

其中提前解約違約金為 $C \geq 0$ 。所需償還的年金和利息則以貸款利率計算其終值。而 $-\int_t^{\infty} \frac{\alpha x(0)}{r}[1 - e^{-r(z-t)}]s'(z; \gamma) dz$ 即為利用死亡機率所計算的未來領取年金現值之期望值。最後我們可以得到計算提前解約價值的數學模型：

$$\hat{V}(t, x) = \max_{T \leq T_{max}} E\{e^{-r(T-t)}F(T, x(T)) | x(t) = x\}, \dots\dots\dots (23)$$

其中 T_{max} 為生物最大年齡與RM合約生效日之差距。

對於式(23)的求解，由於 $F(t, x)$ 與變數 t 有關，求解上相對困難，較常使用數值求解。然而，若能在適當假設下，降低數學難度並求得可分析的公式，則在實務上有更大的應用。我們做出以下兩個假設：

1. 考慮提前解約可能發生於近期未來 $[t, t']$ 。
2. 式(22)中因提前解約所損失的價值，不採用於每個時間點的損失價值，而是採用 $[t, t']$ 的平均損失價值。

以上第二個假設會使得式(22)的 $F(t, x)$ 與變數 t 不相關。而第一個假設，若所選的 $[t, t']$ 長度足夠長，由於提前解約之概念相似於美式選擇權(American-style option)，第二個假設如同選擇權的執行價格(strike price)為常數，在存續期間較長時，選擇權價值與最佳履約曲線(early exercise curve)初期受到時間因素影響較小。若定義為 $M_{[t, t']}$ 為於 $[t, t']$ 中，於各時間點所償還的年金和利息，以及損失的未來年金現值之平均值，則我們可以將式(22)取代為：

$$G(x) = \begin{cases} x - M_{[t, t']} - C, & \text{if } t < \tau \\ 0, & \text{if } t \geq \tau \end{cases}. \dots\dots\dots (24)$$

因此式(23)改寫為：

$$\bar{V}(t, x) = \max_{T \leq t_{\max}} E \left\{ e^{-r(T-t)} G(x(T)) \mid x(t) = x \right\} \circ \dots \dots \dots (25)$$

對於式(25)的求解，我們利用Dixit & Pindyck(1994)中所介紹的實質選擇權(real option)計價方法求解，可轉換成偏微分方程的自由邊界問題。其所需滿足的偏微分方程為：

$$r\bar{V}(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \bar{V}(t, x) = (r - \delta)x \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{V}(t, x), \dots \dots \dots (26)$$

並滿足以下條件：若 $T^* < t$ 為最佳解約時間，則：

$$V(T^*, x^*) = x^* - M_{[t, t']} - C, \dots \dots \dots (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(T^*, x^*) = 1 \circ \dots \dots \dots (28)$$

式(27)和式(28)分別被稱為value-matching條件和smooth-pasting條件。根據我們所做的假設，

$[t, t']$ 長度必須較長，因此時間對提前解約的價值影響較小，故 $\frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(t, x)$ 可被忽略不計。式(26)

因此可退化為常微分方程(ordinary differential equation, ODE)。其解形式為 $\bar{V}(x) = ax^b$ ，其中 a 和 b 為未知係數。將解代入方程式後比較係數，可以得到：

$$b = \frac{-(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}) + \sqrt{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} \circ \dots \dots \dots (29)$$

此處 b 可被證明其值大於1。另一方面，利用式(27)和式(28)，我們可求得提前解約時最低房價 x^* 和係數 a ：

$$x^* = \frac{b}{b-1} (M_{[t, t']} + C), \dots \dots \dots (30)$$

以及 $a = \frac{1}{b(x^*)^{b-1}}$ 。若 $x > x^*$ ，則提前解約應立即發生，因此提前解約的價值為：

$$V(x) = x - M_{[t, t']} - C \circ \dots \dots \dots (31)$$

最後，我們提出近期末來 $[t, t']$ 長度的選擇建議。為了提高估算提前解約的最低房價的精確度，我們需要降低該時段因提前損失的平均損失價值 $M_{[t, t']}$ 與實際損失價值之差距。因此在

$[t, t']$ 長度足夠長時，我們計算於各時間點的實際損失價值，並進一步計算平均值以及標準差後，求得變異係數(coefficient of variance)。在變異係數較低時，代表實際損失與平均損失之差異較小。使得該估計方式下所計算的提前解約時最低房價較為精準。因此在實務上，可利用式(30)估算當前發生提前解約的可能性。

三、敏感度分析

本節針對第2節所求得的RM合約價值和提前解約條件進行敏感度分析。我們探討的參數包含了：起始房價 $x(0)$ 、年金給付率 α 、房租收益率 β 、無風險年利率 r 、房屋折舊率 δ 、房價波動度 σ 以及貸款利率 ρ 。我們除了分析RM合約價值外，也討論各參數對估算的提前解約最低房價，即式(30)，之影響。

我們從起始房價 $x(0)$ 開始。首先根據第2節結果，在 $t = 0$ 時， $d_1(\tau)$ 和 $d_2(\tau)$ 之值皆與 $x(0)$ 無關，此代表在風險中立角度下，房產剩餘價值為正的機率與起始房價無關。我們可以從(21)式中觀察到，VRM會隨著 $x(0)$ 遞增，即起始房價越高時，RM合約價值也越高。其原因為年金給付較高，並且在風險中立角度下，平均房租收益也更高，因此得到較高的平均生存給付。而死亡給付方面，在式(21)中， $\frac{\alpha x(0)}{\rho}(e^{r\tau} - 1)$ 如同歐式買權的執行價格(strike price)。雖然此項隨著 $x(0)$ 上升，但因為買權最低價值為0，因此若死亡給付不是深度價內(deep-in-the-money)時，較高的起始房價會放大未來的可能死亡給付，因此死亡給付的價值也隨著起始房價上升。而根據式(30)，在起始房價較高時，由於因提前解約所償還的年金和利息增加，且因提前解約而損失的未來年金給付也增加，因此估算的提前解約最低房價也上升。

我們接下來討論年金給付率 α 的影響。在年金給付率較高時，借方可以得到較高的年金，導致生存給付升高。在死亡給付方面，較高的生存給付率將會降低房屋剩餘價值為正的機率，進而造成死亡給付價值下降。因此RM合約價值如何受到年金給付率影響並無明確結果。同樣的現象，也發生在租金收益率 β ，其原因類似於年金給付率的例子，於此不再重複敘述。在提前解約的最低房價方面，如同上述的起始房價一樣，較高的年金給付率造成償還的年金和利息以及因提前解約而損失的未來年金都升高，因此降低借方提前解約的意願，即提前解約的最低房價也上升。而房租收益率則對提前解約的最低房價無影響。

有關無風險年利率的影響，我們假設，即不考慮負利率與零利率之情形。首先：

$$\frac{d}{dr} \frac{1 - e^{-r\tau}}{r} = \frac{e^{-r\tau}(r\tau + 1) - 1}{r^2}, \dots\dots\dots (32)$$

因為 $[e^{-r\tau}(r\tau + 1) - 1] |_{r=0} = 0$ 且：

$$\frac{d}{dr} [e^{-r\tau}(r\tau + 1) - 1] = -r\tau^2 e^{-r\tau} < 0, \dots\dots\dots (33)$$

我們得到：

$$\frac{d}{dr} \frac{1-e^{-r\tau}}{r} = \frac{e^{-r\tau}(r\tau+1)-1}{r^2} < 0 \text{。} \dots\dots\dots (34)$$

因此無風險年利率上升時，累積折現年金給付將下降，此導致生存給付下降。另一方面，根據歐式買權權利金性質，無風險年利率上升時，買權權利金會上升，故死亡給付上升。綜合以上分析，RM合約價值在無風險年利率上升時，並無明確結果說明其如何被影響。在提前解約時的最低房價方面，由於提前解約而造成的年金損失隨著高無風險年利率而上升，因此降低了借方提前解約的意願，故提前解約的最低房價較高。

在房屋折舊率 δ 的影響方面，如同無風險年利率的分析方式，較高的房屋折舊率會降低生存給付。有關死亡給付的部分，由於我們可將死亡給付視為一個歐式買權，其標的物股票連續給付股票股利，而 δ 之作用如同股票股利。故房屋折舊率上升，將導致死亡給付下降。因此在房屋折舊率上升時，RM合約價值將下降。其原因為房屋價值上升速度較慢或下降速度較快，導致租金收益減收，而房屋剩餘價值也有較大機會偏低。在提前解約的最低房價方面，由於：

$$\frac{\partial}{\partial \delta} b = \frac{1}{\sigma^2} \left[1 - \frac{r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}}{\sqrt{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r}} \right] > 0 \text{，} \dots\dots\dots (35)$$

故房屋折舊率升高時， $\frac{b}{b-1}$ 將下降。因此提前解約的最低房價也下降。其可能原因為較高的房屋折舊率使得高房價發生可能性降低，因此若考慮提前解約，借方不應等待高房價的出現再執行。

我們現在討論房價波動度 σ 的影響。首先式(21)中可見生存給付並未受到房價波動度影響。而由於死亡給付與歐式買權之概念相同，因此房價波動度上升時，死亡給付的價值也隨之上升。整體而言，RM合約價值與房價波動度呈正向關係。在提前解約時的最佳房價方面，因為：

$$\frac{b}{b-1} = \frac{-(r-\delta) + \sqrt{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r} + \frac{\sigma^2}{2}}{-(r-\delta) + \sqrt{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2 r} - \frac{\sigma^2}{2}} \text{，} \dots\dots\dots (36)$$

當房價波動度上升時， $\frac{b}{b-1}$ 也上升，因此我們得到提前解約的最低房價，會隨著房價波動度上升。其可能原因如下：當房價波動度較高時，會使得高房價出現的機會增加。因此借方若考慮提前解約RM合約，會有較多的動機等待更高的房價出現。

最後我們探討貸款利率 ρ 的影響。首先式(21)中可得到生存給付與貸款利率並無關係。由於 $\frac{\alpha x(0)}{\rho}(e^{\rho\tau} - 1)$ 於死亡給付中類似於歐式買權的執行價格，且因為：

$$\frac{d}{d\rho} \frac{e^{\rho\tau} - 1}{\rho} = \frac{e^{\rho\tau}(\rho^2 - 1) + 1}{\rho^2}, \dots\dots\dots (37)$$

$\left[e^{\rho\tau}(\rho^2 - 1) + 1 \right]_{\rho=0} = 0$ 以及：

$$\frac{d}{d\rho} \left[e^{\rho\tau}(\rho^2 - 1) + 1 \right] = \rho(\rho^2 + 1)e^{\rho\tau} > 0, \dots\dots\dots (38)$$

因此貸款利率上升時， $\frac{\alpha x(0)}{\rho}(e^{\rho\tau} - 1)$ 上升。其結果便是死亡給付價值下降。在提前解約房價方面，由於所需償還的年金和利息因較高的貸款利率而上升，故借方提前解約的意願降低，因此提前解約的最低房價較高。

本節最後將上述所有分析結果整理於表二。由於本文的數學模型是延伸陳勤明等(2017)，因此本文在敏感度分析所得之理論結果，與陳勤明等(2017)符合。而部分未明之結果，則必須進一步利用不同參數分析。在提前解約的最低房價方面，由於此類問題在求解上有其難度，在敏感度分析上，多以代入參數模擬的方式處理。本文在適當假設下，估算的提前解約房價條件計算容易，並可利用求得參數對提前解約條件之影響，對理論分析和應用上有其方便性。

表二 生存給付、死亡給付、RM合約價值(生存給付與死亡給付之和) 以及估算的提前解約最低房價與各因素之關係。

	生存給付	死亡給付	RM合約價值	提前解約時最低房價
起始房價	+	+	+	+
年金給付率	+	-	?	+
房租收益率	+	-	?	*
無風險年利率	-	+	?	+
房屋折舊率	-	-	-	-
房價波動度	*	+	+	+
貸款利率	*	-	-	+

“+”表示正向關係；“-”表示負向關係；“*”表示不相關；“?”表示無明確結果

四、數值結果

在本節中，我們設定各參數的數值進行RM合約價值，以及提前解約的最低房價計算。我們採用了陳勤明等(2017)文章中的相同參數設定，各例子的共同參數數值列於表三。另一方面，提前解約的違約金假設為起始房價的5%，而我們在估算提前解約的最低房價時，近期未來的時間長度則假設為2年。

表三 各參數之數值

起始房價	無風險年利率	貸款利率	房價波動度	房屋折舊率	房租收益率	提前解約成本
10000000	1.375%	1.417%	10%	3%	1.57%	500000

有關死亡率的估算，我們利用Lee & Carter(1992)以及Human Mortality Database的資料估計。

表四列出各性別和年齡下的年金給付率：

表四 各性別和年齡下的年金給付率

年齡	年金給付率(男)	年金給付率(女)
65歲	3.324%	2.880%
70歲	4.176%	3.636%
75歲	5.436%	4.750%

利用表三和表四中的參數，我們將各性別、年齡以及年金給付率下的生存給付價值以及死亡給付價值列於表五：

表五 各性別、年齡和年金給付率下的生存給付價值、死亡給付價值
以及RM合約價值

單位：萬元

年齡	男 性			女 性		
	生存給付	死亡給付	RM價值	生存給付	死亡給付	RM價值
65歲	796.40	203.36	999.75	821.14	155.65	976.79
70歲	773.25	244.65	1017.9	800.99	198.37	999.36
75歲	744.47	292.60	1037.1	774.17	249.28	1023.5

我們分析表五之結果，在模型假設無風險年利率為常數、房價滿足幾何布朗運動、以及生存給付包含年金和房租報酬之下，若生存給付的計算僅考慮當前的年金給付和房租收益，而死亡給付之計算採用的機率僅為各時間點的死亡機率，則本文模型估算的生存給付價值略高，而死亡給付價值則是較低。前者的可能原因為本文模型對生存給付的計算是從合約開始至死亡時間之間的折現累積年金和租金收益。而死亡給付發生的機率則是借方須先存活至該時間，而後於該時間瞬間死亡，而非僅是使用該時間死亡的機率。另一方面，在沒有死亡給

付之下，所有的RM合約價值皆遠低於起始房價，代表若RM合約沒有放寬房產剩餘價值繼承，則年金給付率有上調空間。而在有死亡給付的情形下，RM合約價值與起始房價相差不遠，代表年金給付率尚屬合理。

我們進一步討論，在各性別與年齡的條件下，年金給付率應為何才會使得：

1. 生存給付價值等於起始房價，或
2. RM合約價值等於起始房價。

上述第一種情況可解釋為RM合約限制房產剩餘價值繼承。我們利用求根演算法(root-finding algorithms)中的二分法(bisection method)進行求解。表六呈現使得生存給付價值等於起始房價的年金給付率：

表六 各性別與年齡下，使得生存給付價值等於起始房產的年金給付率

年齡	調整後年金給付率(男)	調整後年金給付率(女)
65歲	4.509%	3.788%
70歲	5.796%	4.870%
75歲	7.777%	6.535%

比較表六與表四，我們得到在限制房產剩餘價值繼承下，現行的年金給付率必須大幅上調，才能達到合約對借貸雙方公平。若放寬限制繼承，從表七中可見，現行的年金給付率並不需要進行大幅度調整，即死亡給付價值約為起始房價與生存給付價值的差值。因此也可藉由放寬繼承房產價值限制，來達到對借貸雙方皆公平的現象。

表七 各性別與年齡下，若放寬房產繼承限制，RM合約價值等於起始房產的年金給付率

年齡	調整後年金給付率(男)	調整後年金給付率(女)
65歲	3.326%	3.039%
70歲	3.983%	3.642%
75歲	4.879%	4.459%

由於無風險年利率也是影響RM合約的重要因素，我們接下來討論無風險年利率變化時，如何影響RM合約價值。此處由於貸款利率是無風險年利率加上利差0.042%，因此貸款利率也會跟著變動。為了簡化分析，我們僅討論RM合約起始時間為借方65歲時。無風險年利率假設為：0.775%、1.075%、1.375%、1.675%以及1.975%。表八呈現各無風險利率下的男性和女性的生存給付價值、死亡給付價值和RM合約價值：

表八 各性別以及無風險年利率下的生存給付價值、死亡給付價值
以及RM合約價值

單位：萬元

無風險 年利率	男 性			女 性		
	生存給付	死亡給付	RM價值	生存給付	死亡給付	RM價值
0.775%	838.87	195.89	1034.8	867.22	147.64	1014.9
1.075%	817.05	199.58	1016.6	843.51	151.59	995.09
1.375%	796.40	203.36	999.75	821.14	155.65	976.79
1.675%	776.84	207.23	984.07	800.03	159.83	959.86
1.975%	758.31	211.20	969.51	780.10	164.11	944.21

在表八中，我們可以發現無風險年利率升高時，生存給付價值下降而死亡給付價值上升。RM合約價值則呈現下降趨勢。推測其可能原因為高無風險年利率導致年金給付和租金收益現值降低，因而降低累積價值。而雖然貸款利率升高，但因為年金給付現值降低，因此房產剩餘價值升高，造成死亡價值升高。

我們現在利用式(30)估算各年齡下的提前解約時最低房價。首先，我們先確認所設定的近期未來長度，是否使得平均損失價值取代各時間點實際損失價值適當。我們將各年齡與性別的兩年間於各時間的實際損失變異係數呈現於表九。由表九中可見，近期未來為兩年所得到的變異係數約在1.6%至3.3%之間，代表平均值與各實際值之差距較小。因此我們認為，近期未來為兩年的設定尚屬合理。又由於兩年對選擇權為較長的存續期間，因此降低了時間對價值的影響，故式(30)估計提前解約的最低房價有一定可信度。

表九 利用式(30)估計提前解約的最低房價時，兩年間各時間點實際損失價值的變異係數範圍

	男 性	女 性
65歲	1.78% ~ 2.06%	1.67% ~ 1.88%
70歲	1.96% ~ 2.50%	1.96% ~ 2.15%
75歲	2.19% ~ 3.23%	2.20% ~ 2.24%

表十呈現不同年齡和性別的RM借方，在不同歲數下的提前解約最低房價。從表十中可見，提前解約的最低房價隨著年齡上升而增加。其解釋如下：雖然因提前解約而損失的年金給付減少，但因為貸款利率高於無風險年利率，使得需要償還的年金和利息上升速度更快，因此高歲數時，提前解約的損失價值更高，造成提前解約的意願下降，此結果於實務上的認知一致。另一方面，表十中也發現男性的提前解約最低房價皆高於女性。其可能原因為女性的年金給付率較低，造成因提前解約所需償還的年金和利息，以及損失的未來年金都較低，因此女性提前解約的意願較男性高。在各性別不同起始年齡之下，高起始年齡的提前解約最低房價，隨歲數的遞增速度較高，換言之，提前解約的意願快速下降。其可能原因為起始年齡較高時，年金給付率更高，造成償還的年金和利息隨時間上升較快。最後，在RM合約生效時，借方的提前解約最低房價皆低於起始房價，代表借方在初期就應提前解約。這結果顯示

貸方在設計合約內容時，應思考如何降低RM合約生效初期提前解約可能性較高的狀況。

表十 各起始年齡和性別的RM借方，於不同歲數時的提前解約
最低房價。

單位：萬元

	男 性			女 性		
	起始65歲	起始70歲	起始75歲	起始65歲	起始70歲	起始75歲
65歲	826.15	None	None	812.49	None	None
70歲	934.30	855.23	None	893.69	847.32	None
75歲	1059.03	994.74	885.58	988.96	952.43	881.81
80歲	1203.34	1158.00	1076.66	1101.36	1078.53	1027.83
85歲	1372.09	1351.17	1305.93	1234.37	1229.93	1206.17
90歲	1575.05	1585.38	1586.19	1396.61	1416.70	1428.70
95歲	1817.68	1866.81	1924.56	1594.69	1646.74	1705.26
100歲	2101.67	2197.92	2324.82	1831.47	1923.71	2040.74
105歲	2427.20	2578.04	2784.91	2110.34	2251.19	2438.90

五、結論

由於少子化的影響，RM相關議題越來越熱門。此類合約可以幫助借方生活的基本需求，但貸方若因此造成財務損失，會降低貸方推行的意願，甚至增加政府在長者照顧上的財政負擔，因此如何計算其公平價值實為重要。本文延伸陳勤明等(2017)之RM合約評價模型，探討我國RM合約評價問題。因為RM合約越來越多樣化，除了加入死亡給付條件外，也可放寬允許提前解約的限制。我們假設解約時的違約金為固定，並在借方考慮應償還的年金和利息，以及損失的未來年金之下，利用適當假設，求解估計提前解約最低房價的簡單公式。

根據本文模型所得到的評價公式，在無風險年利率為常數、房價滿足幾何布朗運動、且生存給付包含年金和房租報酬之下，我們重新計算RM合約價值。本文也討論了各參數如何影響生存給付價值和死亡給付價值。並且提出估計提前解約最低房價的方式，以供貸方在不同環境之下，應如何調整RM合約相關參數。利用陳勤明等(2017)的實證資料，我們重新計算RM合約價值。發現重新計算的生存給付價值仍然低於合約起始房價，因此在限制繼承房產剩餘價值時，為增加借方申辦之意願，貸方可提高年金給付率。但實證資料顯示，此狀況下的年金給付率調整幅度將較大。另一方面，除了升高年金給付率，也可朝向放寬限制繼承房產剩餘價值方向思考，實證結果發現，若放寬限制繼承的條件，只需要小幅度調整年金給付率。另一方面，本文也利用實證資料，分析各年齡和性別的RM借方提前解約的最低房價。本文發現，提前解約在RM合約生效初期的門檻偏低，造成提前解約的可能性較高。因此貸方在設計不限制提前解約的RM合約時，應考慮如何降低初期發生提前解約的風險。

參考文獻

中文部分：

陳勤明、洪志興、李宜熹

2017 〈我國不動產逆向抵押貸款評價〉《住宅學報》26(1)：85-100。

Chen, C. M., C. H. Hung & Y. H. Lee

2017 “The Valuation of Reverse Mortgage in Taiwan,” *Journal of Housing Studies*. 26(1): 85-100.

王儷玲、王正偉、劉文彬

2011 〈臺灣實施反向房屋抵押貸款對提升退休所得之影響〉《風險管理學報》13(1)：109-125。

Wang, L. L., J. W. Wang & W. P. Liu

2011 “The Impacts of the Reverse Mortgage on Retirement Income in Taiwan,” *Journal of Risk Management*. 13(1): 109-125.

周台龍、鄭文輝

2008 〈台灣多層次長期照顧財務保障架構之探討〉《臺灣社會福利學刊》7(1)：65-122。

Chou, T. L. & W. H. Cheng

2008 “Financing Long-Term Care in Taiwan: A Multi-Tier Approach,” *Taiwanese Journal of Social Welfare*. 7(1): 65-122

黃泓智、吳文傑、林左裕、鄭雅丰

2008 〈反向房屋貸款在高齡社會的應用〉《風險管理學報》10(3)：293-314。

Huang, H. C., W. C. Wu, T. Y. Lin & Y. F. Cheng

2008 “The Application of Reverse Mortgages in Aging Society,” *Journal of Risk Management*. 10(3): 293-314.

鍾俊文、游欣霓

2007 〈台灣地區實施逆向抵押貸款年金試算〉《貨幣觀測與信用評等》64：43-50。

Zhong, J. W. & H. N. Yu

2007 “Implementation of Reverse Annuity Mortgage,” *Money Watching and Credit Rating*. 64: 43-50.

英文部分：

Black, F. & M. Scholes

1973 “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *The Journal of Political Economy*. 81(3): 637-654.

Chen, H., S. H. Cox & S. S. Wang

2010a “Is the Home Equity Conversion Mortgage in the United States Sustainable? Evidence from Pricing Mortgage Insurance Premiums and Non-Recourse Provisions Using the Conditional Esscher Transform,” *Insurance: Mathematics and Economics*. 46(2): 371-384.

- Chen, Y., M. Connolly, W. Tang & T. Su
 2010b “The Value of Mortgage Prepayment and Default Options,” *The Journal of Futures Markets*. 29(9): 840-861.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll Jr. & S. A. Ross
 1985 “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*. 53(2): 385-407.
- Davidoff, T.
 2009 “Housing, Health, and Annuities,” *Journal of Risk and Insurance*. 76(1): 31-52.
- Dixit, A. K. & R. S. Pindyck
 1994 *Investment under Uncertainty*. NJ: Princeton University Press.
- Huang, H. C., C. W. Wang & Y. C. Miao
 2011 “Securitization of Crossover Risk in Reverse Mortgages,” *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*. 36(4): 622-647
- Kau, J. B. & D. C. Keenan
 1995 “An Overview of the Option-Theoretic Pricing of Mortgages,” *Journal of Housing Research*. 6(2): 217-244.
 1999 “Catastrophic Default and Credit Risk for Lending Institutions,” *Journal of Financial Services Research*. 15(2): 87-102.
- Kau, J. B., D. C. Keenan & W. J. Muller III
 1993 “An Option-Based Pricing Model of Private Mortgage Insurance,” *Journal of Risk and Insurance*. 60(2): 288-299.
- Kau, J. B., D. C. Keenan, W. J. Muller III & J. F. Epperson
 1992 “A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages,” *Journal of Money, Credit and Banking*. 24(3): 279-299.
 1995 “The Valuation at Origination of Fixed-Rate Mortgages with Default and Prepayment,” *The Journal of Real Estate Finance and Economics*. 11(1): 5-36.
- Lee, R. D. & L. R. Carter
 1992 “Modeling and Forecasting US Mortality,” *Journal of the American Statistical Association*. 87(419): 659-671.
- Lee, Y. T., C. W. Wang & H. C. Huang
 2012 “On the Valuation of Reverse Mortgages with Regular Tenure Payments,” *Insurance: Mathematics and Economics*. 51(2): 430-441.
- Li, J. S. H., M. R. Hardy & K. S. Tan
 2010 “On Pricing and Hedging the No-Negative-Equity Guarantee in Equity Release Mechanisms,” *The Journal of Risk and Insurance*. 77(2): 499-522.
- Ma, S., G. Kim & K. Lew
 2007 “Estimating Reverse Mortgage Insurers Risk Using Stochastic Models,” Asia-Pacific Risk and Insurance Association 2007 Annual Meeting.

Merrill, S. R., M. Finkel & N. K. Kutty

- 1994 "Potential Beneficiaries from Reverse Mortgage Products for Elderly Homeowners: An Analysis of American Housing Survey Data," *Real Estate and Economics*. 22(2): 257-299.

Stucki, B. R.

- 2006 "Using Reverse Mortgages to Manage the Financial Risk of Long-Term Care," *North American Actuarial Journal*. 10(4): 90-102.

Szymanoski, E. J.

- 1994 "Risk and the Home Equity Conversion Mortgage," *Real Estate Economics*. 22(2): 347-366.

Venti S. F. & D. A. Wise

- 1991 "Aging and the Income Value of Housing Wealth," *Journal of Public Economics*. 44(3): 371-397.

Vasicek, O.

- 1977 "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*. 5(2): 177-188.

Yang, T. T., H. Buist & I. F. Megbolugbe

- 1998 "An Analysis of Ex-Ante Probabilities of Mortgage Prepayment and Default," *Real Estate Economics*. 26(4): 651-676.