住宅學報　第二十九卷第一期　民國一〇九年六月　學術論著　第47頁—61頁
JOURNAL OF HOUSING STUDIES, VOLUME 29 NO. 1, JUNE 2020

學術論著

不動產逆向抵押貸款與清償選擇權評價

Reverse Mortgage and Prepayment Option Valuation

洪志興*　郭佳政**　陳勤明***

Chih-Hsing Hung*, Chia-Cheng Kuo**, Chin-Ming Chen***

摘　要

不動產逆向抵押貸款(reverse mortgage, RM)制度已引起各個國家重視並陸續推廣，文獻上對此之研究較多聚焦於貸款年金之評價，惟其評價內容多建構在「貸款契約未發生提前清償」的假設下為之。然而，各國實務上的RM契約並未禁止借方提前清償，此隱含了RM契約附加一清償選擇權予借款人。值此，本研究綜合考量利率、房價與死力等變動因素，來評價此一清償選擇權(prepayment option)。經數值模擬結果發現該清償選擇權的價值佔整體RM金額的比率為3.79%，該選擇權的價值反映了RM借方彈性處理房產的權益價值，同時也是RM貸方應重視之契約被提前終止風險成本。

關鍵詞：不動產逆向抵押貸款、清償選擇權、年金

ABSTRACT

The real estate reverse mortgage (RM) system has been highly valued and widely accepted. However, while the valuation of the loanable annuity of RM has been previously discussed, the content of the valuations has mostly been established under the assumption of “no occurrence of prepayment of the loan contract”. In reality, RM contracts in many countries do not prohibit the prepayment by the borrower, which thus implies that the lenders of the RM contract present a free prepayment option to borrowers. Therefore, in this study, variables such as the interest rate, housing price, and the force of mortality have comprehensively been taken into account to assess the prepayment option. The numerical simulation results show that the value of this prepayment option accounts for 3.79 percent of the total RM amount, which reflects the value of the rights and interests of the RM borrower’s flexibility in dealing with the property, in addition to the risk cost of early termination of the contract, which may be of concern to RM lenders.

Key words: reverse mortgage, prepayment option, annuity

(本文於2018年7月12日收稿，2019年1月9日審查通過，實際出版日期2020年6月)

* 國立高雄科技大學金融系教授
Professor, Department of Money and Banking, National Kaohsiung University of Science and Technology, Kaohsiung, Taiwan.

** 國立高雄科技大學財金學院博士生，聯絡作者
Ph. D. Student, College of Finance and Banking, National Kaohsiung University of Science and Technology, Kaohsiung, Taiwan.
E-mail: dj007@cathaylife.com.tw

*** 國立高雄科技大學金融系教授
Professor, Department of Money and Banking, National Kaohsiung University of Science and Technology, Kaohsiung, Taiwan.

本研究感謝科技部研究計畫經費補助(計畫編號：MOST 105-2410-H-327-031-)

一、導論

在許多國家，均存在人口老化所衍生的老年安養問題。年長者如何透過自身的財務規劃來充足老年經濟需求，以降低政府照顧銀髮族財政負擔，遂成為一重要課題。對此，透過不動產逆向抵押貸款(reverse mortgage, RM)的運用，協助擁有房產的長者，將房產轉化為現金領取的做法，已成為老年安養措施的重要思考方向。

RM 制度歷史久遠，但真正的發展則可溯及1989年美國住宅與都市發展部 (Department of Housing and Urban Development)推出的房屋資產轉換貸款計畫(Home Equity Converse Mortgage, HECM)。除此，房利美(Fannie Mae)的開發的住宅持有者逆向抵押貸款 (Home Keeper Reverse Mortgage, HKRM)、老年人財務自由資金公司(Financial Freedom Senior Funding Corporation)的財務自由計畫(Financial Freedom Plan, FFP)亦接續問世。而後，許多國家亦陸續發展出符合各國國情的 RM 方案。綜觀這些 RM 的業務差異性，有些是由政府主辦或由政府保障(金融機構開辦，政府提供保險)，有些是由民營機構提供，前者之經營是以擴展社會福利為目的，後者則以營利為目的。另外，RM貸款金額的領取方式，則常見 lump sum、line of credit、fixed term annuity、tenure annuity，與 combination of a line of credit and annuity 等型態。

我國於2013年3月由行政院衛生福利部主導，並由臺灣土地銀行辦理「不動產逆向抵押貸款制度試辦方案」，此方案試辦至2017年12月31日止，為一「公益型」不動產逆向抵押貸款商品，試辦人數至多100人；臺北市政府社會局接續於2014年12月起至2015年7月截止分兩階段實施「以房養老 實驗方案」，兩階段累積承貸名額至多5組，開放雙人11共同申請。公益型的以房養老方案為我國金融機構帶來正面的示範效果，國內「商業型」不動產逆向抵押貸款商品則在2015年11月由合作金庫商業銀行率先推出，之後，臺灣土地銀行外，另有臺灣中小企業銀行、第一商業銀行、華南商業銀行、臺灣銀行、高雄銀行、中國信託商業銀行、台新國際商業銀行、上海商業儲蓄銀行及兆豐國際商業銀行等多家銀行也陸續推出不動產逆向抵押貸款商品，截至2017年9月底，國內共計11家銀行所承作之商業型不動產逆向抵押貸款共計2,007件，總核貸額度約108億元。

RM 雖然可讓長者將房產轉化為現金領取，以做為老年生活重要經濟來源。然而，其核定之可貸金額多寡勢將影響長者申辦意願。對此，文獻上多從財務面探討 RM 之可貸合理年金，其評價原理主要是立論於收付平衡的原則，也就是借方領取年金之期望金額必需等於貸方處理房產(抵押物)收益價值(如：Tse, 1995等)。其影響評價結果的主要因素則包括利率、房價與死亡率。Boehm & Ehrhardt(1994)在不考慮房價波動風險，根據Cox et al.(1985)提出的利率模型(以下簡稱CIR模型)來模擬利率隨機過程，再引用經驗值計算死亡率來評價 RM。有別於Boehm & Ehrhardt(1994)、Szymanoski(1994)加入房價波動的考量，以幾何布朗運動(geometric brownian motion, GBM)模擬房價隨機過程，來計算本金限制因子(principal limit factor, PLF)，也就是可貸金額與房產價值之比值，該研究結果顯示，利率愈低或借方年齡愈高者 PLF 愈大，可貸金額也愈高。Ma & Deng(2006)則假設房價呈等比率成長，由此評價 RM 貸款之合理年金；他們發現當房價成長率及利率重大改變時，合理年金金額將隨之劇烈改變，其中，借款者年齡愈小(大)者，改變程度愈大(小)。Ma et al.(2007)則同時加入房價與利率的波動考量，他們以 GBM 模擬房價變動，另以 Vasicek 過程描述利率的變動，以蒙地卡羅法模擬分析 RM

保險人風險，其模擬結果凸顯利率與房價變動對保險人損益之影響。Huang et al.(2011)同時考量利率、房價與死力隨機過程，由Lee & Carter(1992)模型估計死亡率，進而來評價 RM 年金。Lee et al.(2012)同樣也考量房價、利率與死亡率變化推導 RM 價格封閉解，面對房價的巨幅波動可能，其房價隨機過程的描述特別以跳躍模型(jump diffusion)來模擬。

上述研究均指出，有鑒於 RM 的貸款年期長，甚至為終身契約，契約期間利率變化、房價漲跌與借款人的壽命存續等，均將影響借貸雙方財務運作。尤其多數 RM 契約之貸方對其債權並無追索權(non-recourse) (註1)，一旦借款人累計領取的貸款金額超越擔保房產價值，即讓貸方陷於財務虧損，因此，部分放款機構會要求借款人，針對債權回收不足風險支付保費，來保障其放款收益；其應繳保費，則依保險保費現值(present value of mortgage insurance premium, PVMIP)等於貸方預期賠付現值(present value of expected loss, PVEL)的原則來精算。

本文認為過往的 RM 評價模型係建構在「貸款契約未發生提前清償」的假設下進行推導而得；然而，大部分 RM 契約並未禁止借方提前清償，隨著市場利率、房價甚至健康狀況的變動，當契約存續期間出現提前清償收益高於續約期望價值時，借方即可能辦理解約(提前清償)。尤其，針對房產剩餘價值(remaining value) (註2)並非歸屬繼承人之 RM 契約，借方若預期存在較高的剩餘價值會被沒入，辦理提前清償的可能性便提高，此清償權價值也會更明顯。此一清償選擇權(prepayment option)價值將反映借方彈性處理房產的權益價值，相對地，也凸顯貸方辦理 RM 所需擔負契約被提前終止的風險成本。

由於傳統的文獻忽略了 RM 契約條款中內含的清償選擇權價值，本文的主要貢獻即在先前的文獻基礎上，進一步評價 RM 內隱清償選擇權的價值，以彌補既有文獻的缺口。本文後續的組織如后：第二節說明 RM 契約下的清償選擇權評價模式；第三節說明前節評價模式下設計的房價、利率與死力之隨機動態過程；第四節說明以台灣 RM 制度為例下的數值模擬分析結果；最後為結論與建議。

二、RM清償選擇權評價

本文探討 RM 契約在其核定的貸款給付水準下，面臨房價、利率和死力波動等風險因素，所隱含的清償選擇權價值。我們以台灣衛福部 RM 制度(註3)為例進行評價。

首先，我們假設借款人於初貸日期(t_0)之年齡為 x_0，一般終極年齡是 ω 歲，則生存期間借方可於每月月初領取之年金金額為：

$$A_j = A_0 \times (1 + [\frac{j-1}{12}] \times 1\%)，\ j = 1, \ldots, (\omega - x_0) \times 12 \quad (1)$$

(1)式中之 A_0 表 RM 起始年金，A_j 為第 j 期($t = t_0 + \frac{j-1}{12}$：t_0 後經 $\frac{j-1}{12}$ 年時間)領取之年金；[ ] 則表高斯符號。台灣 RM 主辦單位衛福部，依抵押房產價值、借款人年齡及性別等來核定年金 (此一年金給付水準如表一)，爾後每隔一年年金金額遞增1%。

再者，各期貸款利率是採當時(時間t)浮動的二年期定期儲金利率 $\tilde{r}(t)$加上一固定利差(π_r = 0.042%)計算。根據此利率計算，RM 第 j 期期末時所累計之債權餘額(outstanding balance, BAL_j)將為：

表一 衛福部RM初年度年金核定金額 單位：元/月

不動產估價現值(萬元)	年齡及性別					
	65歲		70歲		75歲	
	男	女	男	女	男	女
300	8,200	7,100	10,300	9,000	13,400	11,700
500	13,800	11,900	17,300	15,000	22,500	19,600
700	19,300	16,800	24,300	21,100	31,600	27,600
1,000	27,700	24,000	34,800	30,300	45,300	39,500
1,200	33,200	28,800	41,800	36,300	54,400	47,400

說明：上表 RM 年金係初年度給付金額，爾後，逐年遞增1%。

$$BAL_j = \Sigma_{i=1}^{j} A_i \cdot exp(\int_{t_0+i-1/12}^{t_0+j/12} [\tilde{r}(t) + \pi_r]), j = 1, \dots, (\omega\text{-}x_0) \times 12 \quad (2)$$

從財務決策面分析，理性的 RM 借方在清償價值高於續貸價值時，會選擇清償以取得較高價值，反之，則繼續貸款。換言之，在價值極大化的目的下，RM 於第 j 期期末之契約價值(V_j)將等於清償價值(W_j)與續貸價值(C_j)較大者：

$$V_j = \max\{W_j, C_j\} \quad (3)$$

上式的續貸價值，於借方終極年齡時(第 N 期，$N = (\omega - x_0) \times 12$)將歸於零($C_N = 0$)，此時清償價值與契約價值均為零。往前推算(第 j 期，$j = N - 1, \dots, 2, 1$)，則須考量死亡風險的影響，若借方選擇續貸，他即可領取下一期年金，同時可免付下一期租金而續住抵押房屋(假設租金為當時房價乘以不動產出租報酬率(L))，另外，他將於下一期(第 j+1期)面臨兩種可能，一為死亡，契約隨之終止，另一為存活而持有下一期契約價值(V_{j+1})。所以此續約價值可由(5)式計算：

$$C_j = A_{j+1} + \tilde{H}(t_0 + \frac{j-1}{12}) \cdot L + {}_{1/12}P_{x+j/12} \cdot V_{j+1} \cdot exp(-\int_{t_0+j/12}^{t_0+j+1/12} \tilde{r}(t)dt)$$

$$j = 1, \dots, (\omega - x_0) \times 12 - 1 \quad (4)$$

(5)式中，${}_{1/12}P_{x+j/12}$ 表 $x_0 + \frac{j-1}{12}$ 歲者經 1 期(1/12年)後尚生存機率。根據上述關係式，我們即可經由終期回溯推算 RM 契約賦予清償選擇權之期初總價值(V_0)。相對地，若 RM 契約不得提前清償，各期清償價值將為零($W'_j = 0$，$j = 0,1, \dots, (\omega - x_0) \times 12$)，則 RM 各期契約價值將單純等於其續貸價值($V'_j = C'j$，$j = 1, \dots, (\omega - x_0) \times 12$)，我們一樣可由前述模式回溯推算不具清償權之 RM 期初總價值(V'_0)，此二價值差異($V_0 - V'_0$)即反映此清償選擇權之隱含價值。

上述清償權價值之計算，因其美式選擇權特性，評價上需透過數值方法求解；早期文獻多使用二項樹法(Binomial Tree)或有限差分法(Finite Difference Method)來解決美式選擇權需

考慮提前履約的問題，然而其在評價過程若同時涉及多資產或多風險因素的隨機變動之情境下，將面臨維度魔咒(curse of dimensionality)的問題。相對而言，蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo Simulation)在處理多資產或多風險因素之隨機過程上相對容易，但其卻難適用於美式選擇權之評價。Longstaff & Schwartz(2001)以最小平方法(Ordinary Least Square, OLS)求算美式選擇權中的持有價值，克服了Monte-Carlo法在計算美式選擇權上無法考慮提前履問的問題。有鑑於本研究評價需同時考慮利率、房價與死力之隨機過程，所以我們採用Longstaff & Schwartz(2001)所提的最小平方蒙地卡羅模擬法 (Least Square Monte Carlo Simulation, LSMC)來計算RM清償選擇權價值。

三、RM風險因子模型

根據上一節清償選擇權評價模型，影響其價值之風險因子包括：房價、利率與死亡率因素，我們將透過此三因子隨機過程模擬，在風險中立機率測度下評價清償選擇權價值。以下，分述此三風險因子。

(一) 房價模型

文獻對於房價動態的適配模型可分為兩大類型，分別為連續時間模型與離散時間模型。連續時間模型中，傳統文獻假定房價服從幾何布朗運動(如：Kau et al., 1992; 1995; Kau et al., 1993; Szymanoski, 1994; Chinloy & Megbolubge, 1994; Kau & Keenan, 1995; 1999; Hilliard & Reis, 1998; Yang et al., 1998; Bardhan et al., 2006; Ma et al., 2007; Wang et al., 2007; Huang et al., 2011)。然而，Mizrach(2008)、Schloemer et al.(2006)與Chen et al.(2010b)實證指出房價具有跳躍的狀態，若未考量跳躍特性將導致錯誤的評價。對此，Chen et al.(2010b)與Lee et al.(2012)組合布朗運動與複合卜瓦松過程配適房價的跳躍特性。前者採用Gerber & Shiu(1994)發展的 Esscher transform 方法進行測度轉換，後者則採Bühlmann et al.(1996)發展的conditional Esscher transform方法進行測度轉換。離散時間模型中，傳統計量文獻指出房價存在序列相關狀態(如：Case & Shiller, 1989; Hosios & Pesando, 1991; Ito & Hirono, 1993; Institute of Actuaries, 2005)與波動率群聚現象(如：Nothaft et al., 1995; Chinloy et al., 1997; Chen et al., 2010a; Li et al., 2010等)。針對上述兩類實證結論，Chen et al.(2010a)與Lee et al.(2012)採用ARMA-GARCH 模型配適房價動態，而 Li et al.(2010)則採用 ARMA-EGARCH 配適房價動態，此三篇文獻均採 Esscher transform 的相關方法進行測度轉換。

對於房價的動態，本研究將採Chen et al.(2010a)與Lee et al.(2012)的方式，以 ARMA(m,n)–GARCH(p,q) (註4)配適房價的動態行為。具體而言，在(Ω, F, P, $(F_t)_{t=0}^{T}$)的濾網機率空間(註5)下，對數房價的差分(房屋對數報酬率)之條件均值模型可以陳式如下：

$$R(t) = \ln\left(\frac{\tilde{H}(t)}{\tilde{H}(t-\Delta t)}\right) = \mu_{\tilde{H}}(t) + \varepsilon_{\tilde{H}}(t) \qquad (5)$$

其中，$\mu_{\tilde{H}}(t) = \mathrm{c} + \sum_{j=1}^{m}\alpha_i R(t-i\Delta t) + \sum_{j=1}^{n}\beta_i \varepsilon_{\tilde{H}}(t-j\Delta t)$為給定 $F_{t-\Delta t}$ 資訊下的條件均值函數；$\varepsilon_{\tilde{H}}(t)$為給定 $F_{t-\Delta t}$ 資訊下具有 $h(t) = \gamma + \Sigma_{i=1}^{p}\delta_i h(t-i\Delta t) + \Sigma_{j=1}^{q}\varkappa_j \varepsilon_{\tilde{H}}^2(t-i\Delta t)$ 條件變異型式的新息過程

(innovation process)。對此，可根據 Bühlmann et al.(1996)提出的conditional Esscher transform之等價平賭測度轉換方法，將上式轉換為如下風險中立測度 Q 下的動態過程：

$$R(t)=\ln\left(\frac{\tilde{H}(t)}{\tilde{H}(t-\Delta t)}\right)=\tilde{r}(t)\Delta t-\frac{1}{2}h(t)+\varepsilon_{\tilde{H}}^{Q}(t) \quad (6)$$

其中，$\tilde{r}$ 為無風險利率之動態，其之具體設定待下小節說明。進一步，仿Chen et al.(2010a)與Li et al.(2010)的作法，考量租金收益調整後的動態過程為：

$$R(t)=\ln\left(\frac{\tilde{H}(t)}{\tilde{H}(t-\Delta t)}\right)=[\tilde{r}(t)-g(t)]\Delta t-\frac{1}{2}h(t)+\varepsilon_{\tilde{H}}^{Q}(t) \quad (7)$$

其中 $g(t)$ 為房屋的租金收益率。

(二) 利率模型

在同時考慮房價動態的評價文獻中，對於利率期間結構的設定有如下三類：假定固定利率或平坦型利率期限結構(如：Chen et al., 2010a)；假定利率服從 Vasicek過程(如：Ma et al., 2007)；假定利率服從CIR過程(如：Boehm & Ehrhardt, 1994; Lee et al., 2012)。為避免利率動態產生不合理的負值現象，並反映利率具均數回歸的特性，本研究採CIR過程建置利率動態，具體形式如后：

$$d\tilde{r}(t)=\eta_{\tilde{r}}(\theta_{\tilde{r}}-\tilde{r}(t))dt+\sigma_{\tilde{r}}\sqrt{\tilde{r}(t)}dW_{\tilde{r}}(t) \quad (8)$$

其中，$\theta_{\tilde{r}}$ 為短率的長期均數，$\eta_{\tilde{r}}$ 為均數復回的速度、$\sigma_{\tilde{r}}$ 為瞬間波動率、$W_{\tilde{r}}(t)$為標準布朗運動。根據等價平賭測度轉換原理，可以推得風險中立測度 Q 下的利率動態模型：

$$d\tilde{r}(t)=(\eta_{\tilde{r}}^{Q}-\theta_{\tilde{r}}^{Q}\tilde{r}(t))dt+\sigma_{\tilde{r}}\sqrt{\tilde{r}(t)}dW_{\tilde{r}}^{Q}(t) \quad (9)$$

其中，$\eta_{\tilde{r}}^{Q}=\eta_{\tilde{r}}\theta_{\tilde{r}}$ 、$\theta_{\tilde{r}}^{Q}=\eta_{\tilde{r}}+\varphi_{\tilde{r}}$ 、$dW_{\tilde{r}}^{Q}(t)=dW_{\tilde{r}}(t)+(\varphi_{\tilde{r}}\sqrt{\tilde{r}(t)}/\sigma_{\tilde{r}})dt$ ，$\varphi_{\tilde{r}}$ 為風險溢酬參數。房價動態方程中的 $\varepsilon_{\tilde{H}}^{Q}(t)/\sqrt{h(t)}$ 與房價動態中的 $W_{\tilde{r}}^{Q}(t)/\sqrt{t}$ 之相關係數為 $\rho_{\tilde{H}\tilde{r}}$。透過此關係可體現兩資產動態的關聯性。(8)式所對應的離散形式為：

$$\tilde{r}(t+\Delta t)-\tilde{r}(t)=(\eta_{\tilde{r}}^{Q}-\theta_{\tilde{r}}^{Q}\tilde{r}(t))\Delta t+\sigma_{\tilde{r}}\sqrt{\tilde{r}(t)}\Delta W_{\tilde{r}}^{Q}(t) \quad (10)$$

(三) 死力模型

關於死力隨機過程的模型建置，大致可歸納為 Time Series Approach (如：Lee & Carter, 1992; Cairns et al., 2006)、Reduction Factor Approach (如：Milevsky & Promislow, 2001; Ballotta & Haberman, 2006)與Affine Approach (如：Dahl, 2004)等三類。由於Lee-Carter模型在實務應用的普遍性(Lee & Miller, 2001)，本文採Lee-Carter模型來配適死力過程。

Lee & Carter(1992)提出一個可以描繪中央死亡率(Central Mortality Rates) $m_x(t)$的線性方程式：

$$\ln m_x(t) = a_x + b_x k(t) + \varepsilon_x(t) \quad (11)$$

其中，a_x 為 x 年齡組之死亡率對數值 ($\ln m_x(t)$) 的平均數，該平均值以幾何平均的對數表示，亦即若樣本期間為 n 期，則 $a_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(m_x(t_i)) = \ln(\prod_{i=1}^{n}(m_x(t_i))^{1/n})$；$k(t)$表示 t 年時的時間趨勢(死亡率強度)，實務上，其通常以 ARIMA(0,1,0) 進行配適(Lee et al., 2012)；b_x 則是 x 年齡組相對死亡率的變化速度(趨勢的反應程度)；$\varepsilon_x(t)$為 x 年齡組在 t 年時的隨機誤差項，其以白噪音模型配適(Lee, 2000)。

Lee-Carter模型一般假定特定年齡組的死亡率在特定的年齡與時間之帶寬內是恆定的，但在不同的帶寬間則是變動的，時間寬度通常為一年。亦即，給定任意時間點 t_0，若當時借款人之年齡為x_0 (假設x_0與t_0均為整數)，則借款人之中央死亡率在同一年度內不會改變(即：$m_{x_0+s}(t_0 + v) = m_{x_0}(t_0)$, $s,v \in [0,1)$)，不同年度則對應到不同之中央死亡率($m_{x_0+s}(t_0 + v) \neq m_{x_0}(t_0)$, $s,v \geq 1$)。由此，x_0 歲的人存活到 x_0 + y 歲的機率(${}_np_{x_0,t_0}$)如(12)式：

$$ {}_np_{x_0,t_0} = \exp(-\sum_{y=0}^{n-1} m_{x_0+y}(t_0+y)) = \exp(-\sum_{y=0}^{n-1}\exp(a_{x_0+y} + b_{x_0+y}k(t_0+y))) \quad (12)$$

從而我們可以得知在 P-measure (真實世界測度)下 ${}_np_{x_0,t_0}$ 的分佈函數(Distribution Function)為 $F_n(x) = \Pr({}_np_{x_0,t_0} \leq x)$。

透過Wang(2000)所提出的測度轉換技巧，我們可以將 ${}_np_{x_0,t_0}$ 的分佈函數轉換為 Q-measure 下分佈函數：

$$F_n^{\tau}(x) = \Phi(\Phi^{-1}(F_n(x))+\tau) \quad (13)$$

其中，τ 被稱風險的市場價格(Market Price of Risk)；$\Phi(\cdot)$為標準常態分佈函數；$F_n^{\tau}(\cdot)$為Q-measure (風險中立下的測度)下的分佈函數。更具體而言，根據Denuit et al.(2007)的作法，我們可以將真實世界下的存活分配 ${}_np_{x_0,t_0}$ 轉換為下列風險中立世界下的版本：

$$ {}_np^{Q}_{x_0,t_0} = \int_0^1 (1 - F_n^{\tau}(x))dx = \int_0^1 (1 - \Phi(\Phi^{-1}(F_n^{□}(x)) + \tau))dx \quad (14)$$

四、數值結果

本節以台灣實施的 RM 制度為例，綜合考量房價、利率與死力之隨機性，評估 RM 制度下所隱含清償選擇權的價值。首先我們將說明各隨機過程的參數估計方式，其後呈現三種風險交叉影響下的清償選擇權價值。

(一) 參數估計

關於房價的實證資料，台灣常見的兩大房價指數為信義房價指數(Sinyi Housing Price Index)與國泰房地產指數(Cathay Real Estate Price Index)，本文採歷史資料期間較長的信義房價指數作為台灣房價指數的代理變數(註6)。此外，房屋租金收益率部分，擬採消費者物價房

租類指數的長期平均進行設算。我們以採最大概似估計法(MLE)方式，對三、(一)節所提的 ARMA–GARCH 模型對房價過程進行參數估計，本研究採用 AIC 法則進行最適模型的選取。最終採行 ARMA(5,0)–GARCH (1,1) 的模型，其估計結果如表二所示。

關於利率的實證資料，我們以台灣中華郵政公司的二年期定期儲金利率做為實證數據。我們亦採最大概似估計法(MLE)對三、(二)節所提的 CIR 模型對利率過程進行參數估計，其估計結果如表三所示。

關於死力資料取自Human Mortality Database (HMD) (註7)中的台灣生命表數據。我們先採 Lee & Carter(1992)的作法，以奇異值分解(SVD)的近似方法估計中心死亡率，據此建構出各年齡在各曆年的生存機率分佈。其後採用 Denuit et al.(2007)的方法進行估算風險的市場價格(τ)。最終以 Wang(2000)的方式對生存機率的測度進行轉換，其估計結果甚多，在此略之。(註8)

(二) 模擬結果

此小節以表一的台灣 RM 試辦方案為例(總計 30 種組合 = 2性別 3 年齡層 5 不動產估價現值層)，考量房價、利率與死力的交叉風險，對試辦方案中隱含的清償選擇權之價值進行 LSMC 蒙地卡羅模擬分析。本文模擬以每期(1/12年)為一時間分割節點，共模擬10,000次。每一模擬路徑，均可觀察各節點是否具備提前清償之條件。因提前清償之條件係存在於清償價值高於續貸價值時，其中，清償價值等於當時房價扣減債權餘額後之淨值((3)式)，而續貸價值則等於下一期年金與契約價值的期望值之和((5)式)。所以，提前清償之條件出現與否，將取決於利率、房價與死力的變化。

根據上一節參數估計，我們即可模擬評價 RM 契約賦予清償選擇權與不具清償權之期初總價值差額，由此推算此清償選擇權之隱含價值。其評價結果如表四所示，此外，表五與圖一以百分比的方式呈現(清償選擇權價值 / 不動產估價現值)。

表二 房價模型估計結果

Para	Coef	Std. Error	t-value	Pr(> | t |)
c	1.34E-02	3.32E-03	4.016	5.92E-05***
a_1	2.88E-01	1.54E-01	1.872	0.06124
a_2	-5.02E-02	1.69E-01	-0.297	0.76682
a_3	-2.21E-01	1.61E-01	-1.373	0.16973
a_4	3.43E-01	1.40E-01	2.448	0.01438*
a_5	3.62E-02	4.59E-02	0.789	0.42991
γ	2.65E-04	1.72E-04	1.537	0.12434
δ_1	3.64E-01	1.38E-01	2.633	0.00846**
$\varkappa_1$	1.00E-08	5.45E-01	0	1

表三 利率模型估計結果

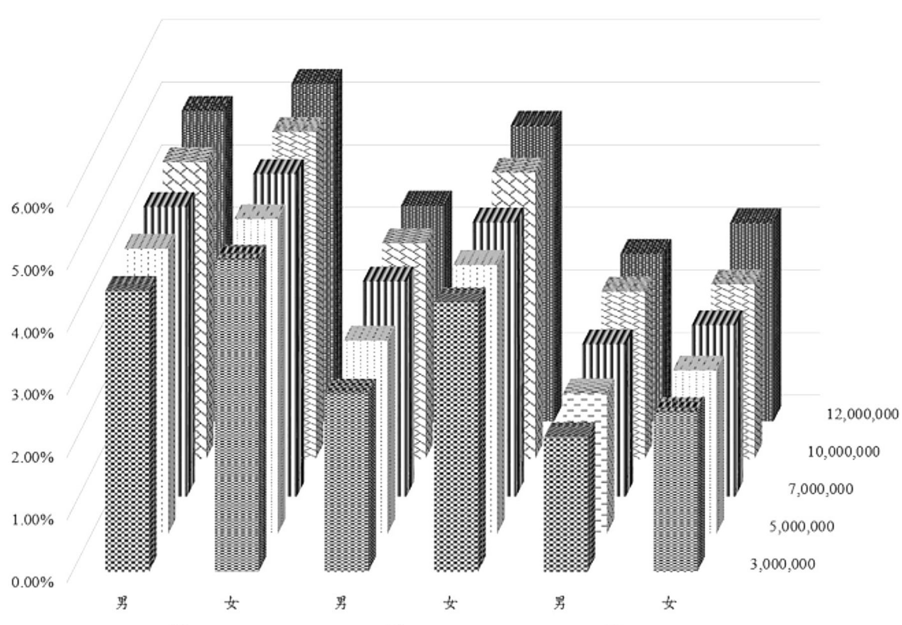
參 數	估 計
$\eta^{Q}_{\tilde{r}}$	0.07253
$\theta^{Q}_{\tilde{r}}$	0.01421
$\sigma_{\tilde{r}}$	0.039152

表四 台灣RM之清償選擇權價值

不動產估價現值(萬元)	年齡及性別					
	65歲		70歲		75歲	
	男	女	男	女	男	女
300	134,631	149,593	85,421	129,033	64,572	76,491
500	227,952	251,551	154,588	215,055	112,460	130,760
700	323,766	360,635	240,364	306,319	170,136	191,530
1,000	474,216	522,377	344,226	457,469	267,322	278,658
1,200	595,239	647,120	413,466	566,636	321,023	380,136

表五 台灣RM之清償選擇權價值百分比

不動產估價現值(萬元)	年齡及性別					
	65歲		70歲		75歲	
	男	女	男	女	男	女
300	4.5%	5.0%	2.8%	4.3%	2.2%	2.5%
500	4.6%	5.0%	3.1%	4.3%	2.2%	2.6%
700	4.6%	5.2%	3.4%	4.4%	2.4%	2.7%
1,000	4.7%	5.2%	3.4%	4.6%	2.7%	2.8%
1,200	5.0%	5.4%	3.4%	4.7%	2.7%	3.2%



圖一 台灣RM之清償選擇權價值百分比

由於表四揭露的清償選擇權價值屬於絕對數額，其不利於不同類別之比較與分析，對此，本文進一步將表四的絕對金額轉為相對比率方式呈現，表五中揭露的清償選擇權百分比定義為清償選擇權價值除以不動產估價現值，該比率值代表 RM 合約中隱含的清償選擇權價值比重。藉由圖一的展示，其更直觀的體現影響清償選擇權價值的重要因素，由該圖可以看出，不動產估價現值對於清償選擇權的價值不具有太大的影響性，惟價值略隨不動產估價現值之增高呈現微幅遞增的態勢。更進一步觀察，影響清償選擇權價值的主要因素為性別與年齡兩個類別。在同齡齡層中，女性類別的清償選擇權價值比均高於男性類別者；此外，越早申貸 RM 方案者(存續期間越長者)，清償選擇權的價值相對越高，該結構現象符合存續期間對選擇權價值的理論預期。關於性別差異的原因，可能是由於試辦 RM 方案中的女性的年金高於男性的年金，導致房價出售價值與收受年金不均等下有利於清償選擇權的執行。關於年齡層的差異之原因，則除了前項原因外，亦參雜了房價動態模型的演變與死力因素之影響。綜合而言，清償選擇權的價值展現，可做為 RM 試辦方案年金是合理試算的評估準則之一。

五、結論與建議

在我們的知識領域中，各國 RM 的實務契約多沒有限定借方不能提早清償的限制條款，此意謂 RM 隱含了一個清償選擇權的價值。然而，傳統 RM 評價模型的文獻並沒有考量到此一隱含選擇權的價值，該選擇權的價值反映了 RM 借方彈性處理房產的權益價值，同時也是 RM 貸方應重視之契約被提前終止風險成本。忽略該價值的評價模型將使 RM 的借方低估 RM 的申貸價值，另一面向即使 RM 的貸方高估了 RM 的放貸價值。

為彌補文獻上的此一缺口，本文在先前文獻的基礎上，提出一個綜合考量利率、房價與死力等動態過程的清償選擇權評價模式。經數值模擬結果發現該清償選擇權的價值佔整體 RM 金額的比率約為3.79%，此結果凸顯了清償選擇權在 RM 評價上的重要性與不可忽視性。此外，影響清償選擇權價值的主要因素為性別與年齡層，其之成因值得未來研究進一步評析。

註　釋

註1：貸款餘額高於房產處分價值時，貸方僅能取得房產價值。

註2：借款人死亡時，擔保品處分收益高於債權餘額(Outstanding Balance)的部分。

註3：衛福部 RM 業務之開辦目的為照顧單身長者，申辦條件限定年滿 65 歲且無法定繼承人者，借方生存期間可於每月月初領取年金，並續住抵押房屋；身故時，契約即行終止抵押房產也全歸貸方所有。如此的契約約定，看似借方辦理 RM 後不再有權安排房產歸屬，也喪失將來房價上漲轉手獲利的可能機會，實際上，年長者辦理 RM 後，仍有權視狀況來決定是否辦理清償，以取回房產處分權。台灣的 RM 制度與其他國家 RM 制度的主要差別在於限制申貸者不能有繼承人，但此差異並不影響本文探討清償選擇權價值的議題。亦即忽略清償選擇權價值的議題，普遍存於既存的 RM 學術文獻與各國 RM 實務中，本文以台灣為例僅是說明便利性的考量。

註4：其中，m 為自我相關項的階數、n 為移動平均項的階數、p 為 GARCH 項的階數、q 為 ARCH 項的階數。

註5：$(F_t)_{t=0}^{T}$ 是右連續自然濾網，使得$F_t \subset F_s, t \le s$。

註6：由於台灣常見的房價指數均屬季頻率資料，然 RM 發行後的相關評價計算均以月為單位，本文採線性內插法將季頻數據轉為月頻數據。

註7：http://www.mortality.org/

註8：Lee-Carter模型的估計之實作，主要採用 R 軟體中的 demography 與 lifecontingencies 兩個套件。

參考文獻

Ballotta, L. & S. Haberman

2006 "The Fair Valuation Problem of Guaranteed Annuity Options: the Stochastic Mortality Environment Case," *Insurance: Mathematics and Economics*. 38(1): 195-214.

Bardhan, A., R. Karapandža & B. Urošević

2006 "Valuing Mortgage Insurance Contracts in Emerging Market Economics," *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 32(1): 9-20.

Boehm, T. P. & M. C. Ehrhardt

1994 "Reverse Mortgages an Interest Rate Risk," *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*. 22(2): 387-408.

Bühlmann, H., F. Delbaen, P. Embrechts & A. N. Shiryaev

1996 "No-arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transforms," *CWI Quarterly*. 9(4): 291-317.

Cairns, A. J. G., D. Blake & K. Dowd

2006 "Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk," *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*. 36(1): 79-120.

Case, K. E. & R. J. Shiller

1989 "The Efficiency of the Market for Single-Family Homes," *The American Economic Review*. 79(1): 125-137.

Chen, H., S. H. Cox & S. S. Wang

2010a "Is the Home Equity Conversion Mortgage in the United States Sustainable? Evidence from Pricing Mortgage Insurance Premiums and Non-Recourse Provisions Using the Conditional Esscher Transform," *Insurance: Mathematics and Economics*. 46(2): 371-384.

Chen, M. C., C. C. Chang, S. K. Lin & S. D. Shyu

2010b "Estimation of Housing Price Jump Risks and Their Impact on the Valuation of Mortgage Insurance Contacts," *The Journal of Risk and Insurance*. 77(2): 399-422.

Chinloy, P., M. Cho & I. F. Megbolugbe

1997 "Appraisals, Transaction Incentives, and Smoothing," *The Journal of Real Estate Finance and Economics*. 14(1-2): 89-112.

Chinloy, P. & I. F. Megbolugbe

1994 "Reverse Mortgages: Contracting and Crossover Risk," *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*. 22(2): 367-386.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll & S. A. Ross

1985 "A Theory of the Term Structure of Interest Rate," *Econometrica*. 53(2): 385-408.

Dahl, M.

2004 "Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality-Linked Insurance Contracts," *Insurance: Mathematics and Economics*. 35(1): 113-136.

Denuit, M., P. Devolder & A. C. Goderniaux
2007 "Securitization of Longevity Risk: Pricing Survivor Bonds with Wang Transform in the Lee-Carter Framework," *The Journal of Risk and Insurance*. 74(1): 87-113.

Gerber, H. U. & E. S. W. Shiu
1994 "Option Pricing by Esscher Transforms," *Transactions of the Society of Actuaries*. 46: 99-191.

Hilliard, J. E. & J. Reis
1998 "Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yields, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot," *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 33(1): 61-86.

Hosios, A. J. & J. E. Pesando
1991 "Measuring Prices in Resale Housing Markets in Canada: Evidence and Implications," *Journal of Housing Economics*. 1(4): 303-317.

Huang, H. C., C. W. Wang & Y. C. Miao
2011 "Securitization of Crossover Risk in Reverse Mortgages," *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*. 36(4): 622-647.

Institute of Actuaries
2005 "*Equity Release Report 2005, Equity Release Working Party, The Actuarial Profession' Volume 2: Technical Supplement Pricing Considerations*," (http://www.actuaries.org.uk/).

Ito, T. & K. N. Hirono
1993 "Efficiency of the Tokyo Housing Market," *NBER Working Papers No*. 4382, National Bureau of Economic Research.

Kau, J. B. & D. C. Keenan
1995 "An Overview of the Option-Theoretic Pricing of Mortgages," *Journal of Housing Research*. 6(2): 217-244.
1999 "Catastrophic Default and Credit Risk for Lending Institutions," *Journal of Finance Services Research*. 15(2): 87-102.

Kau, J. B., D. C. Keenan & W. J. Muller III
1993 "An Option-Based Pricing Model of Private Mortgage Insurance," *The Journal of Risk and Insurance*. 60(2): 288-299.

Kau, J. B., D. C. Keenan, W. J. Muller III & J. Epperson
1992 "A Generalized Valuation Model for Fixed-Rate Residential Mortgages," *Journal of Money, Credit and Banking*. 24(3): 279-299.
1995 "The Valuation at Origination of Fixed-Rate Mortgages with Default and Prepayment," *The Journal of Real Estate Finance and Economics*. 11(1): 5-36.

Lee, R. D.
2000 "The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications," *North American Actuarial Journal*. 4(1): 80-93.

Lee, R. D. & L. R. Carter

1992 "Modeling and Forecasting US Mortality," *Journal of the American Statistical Association*. 87(419): 659-675.

Lee, R. D. & T. Miller

2001 "Evaluating the Performance of the Lee-Carter Method for Forecasting Mortality," *Demography*. 38(4): 537-549.

Lee, Y. T., C. W. Wang & H. C. Huang

2012 "On the Valuation of Reverse Mortgages with Regular Tenure Payments," *Insurance: Mathematics and Economics*. 51(2): 430-441.

Li, J. S. H., M. R. Hardy & K. S. Tan

2010 "On Pricing and Hedging the No-Negative-Equity Guarantee in Equity Release Mechanisms," *The Journal of Risk and Insurance*. 77(2): 499-522.

Longstaff, F. A. & E. S. Schwartz

2001 "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *The Review of Financial Studies*. 14(1): 113-147.

Ma, S. R. & Y. H. Deng

2006 Insurance Premium Structure of Reverse Mortgage Loans in Korea, *Working Paper*, Daegu University.

Ma, S., G. Kim & K. Lew

2007 "Estimating Reverse Mortgage Insurer's Risk Using Stochastic Models," the Asia-Pacific Risk and Insurance Association 2007 Annual Meeting.

Milevsky, M. A. & S. D. Promislow

2001 "Mortality Derivatives and the Option to Annuitise," *Insurance: Mathematics and Economics*. 29(3): 299-318.

Mizrach, B.

2008 *Jump and Co-Jump Risk in Subprime Home Equity Derivatives*, *Working Paper*, Department of Economics, Rutgers University.

Nothaft, F. E., A. H. Gao & G. H. K. Wang

1995 "*The Stochastic Behavior of the Freddie Mac/Fannie Mae Conventional Mortgage Home Price Index*," American Real Estate and Urban Economics Association Annual Meeting, San Francisco.

Schloemer, E., W. Li, K. Ernst & K. Keest

2006 *Losing Ground: Foreclosures in the Subprime Market and Their Cost to Homeowners*. Durham, NC: Center for Responsible Lending.

Szymanoski, E. J.

1994 "Risk and the Home Equity Conversion Mortgage," *Journal of American Real Estate and Urban Economics Association*. 22(2): 347-366.

Tse, Y. K.

1995　“Modelling Reverse Mortgages,” *Asia Pacific Journal of Management*. 12(2): 79-95.

Wang, L., E. A. Valdez & J. Piggott

2007　“Securitization of Longevity Risk in Reverse Mortgages,” *SSRN Working Paper*, University of New South Wales.

Wang, S. S.

2000　“A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks,” *The Journal of Risk and Insurance*. 67(1): 15-36.

Yang, T. T., H. I. Buist & I. F. Megbolugbe

1998　“An Analysis of Ex-Ante Probabilities of Mortgage Prepayment and Default,” *Real Estate Economics*. 26(4): 651-676.