住宅學報　第二十七卷第二期　民國一〇七年十二月　學術論著　第61頁—84頁
JOURNAL OF HOUSING STUDIES, VOLUME 27 NO. 2, DECEMBER 2018

學術論著

住宅增值參與證券之定價模型

Pricing Model for Home Appreciation Participation Notes

楊屯山*　蔡錦堂**　林哲群***

Jerry T. Yang*, Jing-Tang Tsay**, Che-Chun Lin***

摘　要

本文為"住宅增值參與證券"設計更具彈性且符合實務之定價模型及推導出"均衡屋主持分率"，以順暢投資者與購屋者各取所需之交易平台。本文應是首先將"房產持有期間"設為隨機變數，並按實際房屋售價的落點，設計投資者"階段式分配"房價漲跌盈虧的機制，置入於HAPNs定價模型的文章。如此可排除既有之類似商品"分享增值抵押貸款" (Shared Appreciation Mortgages)所導致"投資不足"及"道德風險"的問題。本文並針對投資者分配盈虧比率及無風險利率等關鍵參數，對於HAPNs價值與"均衡屋主持分率"的影響，進行比較靜態分析。模擬結果將有助於HAPNs市場化的持續發展。

關鍵詞：住宅增值參與證券(HAPNs)、定價模型、分享增值抵押貸款(SAMs)、道德風險、不動產市場

ABSTRACT

We propose a pricing model for Home Appreciation Participation Notes (HAPNs) to efficiently promote the HAPNs transaction platform. In addition to housing prices and interest rates, our paper may be the first to consider the "house-holding period" as a stochastic process in pricing HAPNs. Another feature of our model is the design of the stratified sharing scheme for HAPNs investors to share the cash flows after house owners sell the houses, thereby mitigating the concerns with underinvestment and moral hazard embedded in Shared Appreciation Mortgages (SAMs). We simulate the impact of key parameters or determinants on the value of *ex-ante* HAPNs to investors and house owners' "optimal sharing percentages". Our simulation results can shed light on the implementation of securitization in the real estate market and the future development of the HAPNs market in Taiwan.

Key words: Home Appreciation Participation Notes (HAPNs), pricing models, Shared Appreciation Mortgages (SAMs), moral hazard, real estate market

(本文於2017年7月13日收稿，2018年3月15日審查通過，實際出版日期2018年12月)

* 國立聯合大學財務金融學系副教授
Associate Professor, Department of Finance, National United University, Miaoli, Taiwan.
E-mail: jtyang@mx.nthu.edu.tw

** 國立臺北商業大學財務金融系暨研究所副教授
Associate Professor, Department and Graduate Institute of Finance, National Taipei College of Business, Taipei, Taiwan.
E-mail: jttsay@ntub.edu.tw

*** 國立清華大學計量財務金融學系教授，聯繫作者
Professor, Department of Quantitative Finance, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan.
E-mail: chclin@mx.nthu.edu.tw

本研究感謝科技部研究計畫經費補助(計畫編號：MOST104-2410-H-007-052)。本文內容純係作者之觀點，若有任何錯誤，當屬作者之責。

一、研究動機與目的

購屋置產是許多年輕人的夢想之一，或是人生中極為重要的消費或投資標的。而"住宅增值參與證券"(Home Appreciation Participation Notes; HAPNs)的流通，除了讓房地產市場更加活絡，也大大提升青年圓夢的可能。HAPNs的關鍵設計是將房價波動的風險移轉給投資者，當然也增加投資者的期望報酬率，使其有更多元的投資策略可以運用；購屋者負擔房貸的能力也因HAPNs市場的存在而提高；在政府住屋政策的層面也能提高住者有其屋的滿意度，舒緩無殼蝸牛的社會問題，並且降低如2008年全球金融風暴類似事件中，大量違約的骨牌效應。因此，展現HAPNs的多重價值成為本文研究的主要動機。

HAPNs的基本架構與運作方式已於學界發表多時，但至今尚未於市場發行，關鍵之一是缺乏可靠穩健之評價模型。本文主旨即在設計一套合乎HAPNs特性之評價模型；針對其中影響價格之關鍵參數與決定因子進行敏感度分析，並對其可能造成HAPNs預期市場價值與"均衡屋主持分率"的影響進行情境模擬，再以模擬結果作為避險配套與風險管理之參考。本研究結果與量化分析，將有助於HAPNs市場的興起，及提供有關單位住屋政策擬定與推行的參考資料，更希望對整體資本市場的活絡有所助益。

HAPNs的主要優勢，在於不影響原本房屋價格的情況下，降低購屋者的違約風險，改變風險組合，提高其負擔房貸的能力，增加投資管道，並提升不動產物件的流動性。於實際運作方面，相較於傳統房貸，政府無需提供額外的貸款補助即可順利運作，並可舒緩銀行不良債權的問題，似乎是一個多方受益且可行性相當高的商品。本研究的目的是希望藉由HAPNs評價模型的設計，溝通買賣雙方對價格的認知，建立可行的交易平台與促其穩健發展。

二、HAPNs的濫觴

2007年美國次級房貸(Subprime Mortgage)風波中，發生大量貸款者違約事件，繼而引發2008年的全球金融風暴。即使，美國於2010年推出量化寬鬆的貨幣政策，使其國內財經局勢趨於穩定，但於全球經濟而言，一波未平一波又起，直至2012年才算回穩。造成此風暴的起因之一，就是原本償還房貸堪慮的次級房貸客，必須獨自承擔購屋後房價下跌以及利率上升等風險。因此，在房價下跌，甚至泡沫化後，購屋者無力承擔上述風險，導致違約事件大量發生。這種超額購屋的行為，主因是銀行所提供的多種房貸方案，表面上解決了民眾購買力的問題，然而，負擔房貸能力不足的潛在因素並沒有解決，因此埋下日後爆發嚴重後果的種子。時至今日，民眾負擔能力不足的問題，仍未有一金融工具，能為其提供有效的解決方案，HAPNs也為因應此社會問題於學界所發表。雖然其基本架構與運作方式已具雛型，但仍未臻成熟而未在市場上發行。

次級房貸是銀行針對信用評等不佳、收入不穩定或較低收入的購屋者，所發行的一種貸款方案。此專案造成的後續影響為房貸者"超能購屋"後，當開始償付房貸時遇上房價下跌或利率上升的情況，違約的可能性大幅提高；同時，放貸銀行本身的風險控管與資產流動性也將出現問題，而引爆潛在的系統性風險。因此，當2007年美國房價泡沫化後，超能購屋者在沒有足夠的房貸負擔能力時無力承擔此衝擊，使得違約事件數量大幅提高；進而，市場信用緊縮，金融機構面臨流動性風險，造成市場資金短缺；至此，使得之前過於鬆散的信用審

核流程一下子變得過於嚴格。甚至，優良評等的信用貸款者也無法順利取得融資貸款。不僅如此，在房市會繼續下跌的預期心理下，即使有足夠負擔能力的購屋者仍然會採取觀望的態度，或是選擇相對便宜的成屋市場，也因此使得房地產市場進入蕭條時期。

美國政府對於提升住宅自有率一直不遺餘力，但在傳統的抵押房貸架構下，想要達成此目標具有相當難度；因為想要購屋的人勢必要擁有足夠的自備款，或是具有良好的信用紀錄，方可順利申請到房貸。然而，實際使用房屋(而非用於投資)的人，往往是沒有足夠負擔能力的租屋者，因此使得房地產市場需要更多元的金融商品。其實，次級房貸的產生，就是在提升住宅自有率的前提下被提倡的，即使其結果是產生了一場金融浩劫。不過，並非所有的新創金融商品都是如此；例如1970至80年代末期，在蘇格蘭地區曾經發行過“分享增值抵押貸款”(Shared Appreciation Mortgages; SAMs)以及2009年新發起的“住宅增值參與證券”。楊太樂(2009)特別提到HAPNs三項優點：1. HAPN不影響原本的房屋貸款，但會降低違約風險。2. HAPN機制方案不需政府補貼，以資本市場自行運作即可順利解決當前的房貸問題。(政府面對房貸問題會採取減輕本金或降低房貸利率等措施予以解決有HAPNs就不用) 3. HAPN可幫助傳統金融機構將不良債權轉為正常債權，進而增加放款總量。

三、分享增值抵押貸款(SAMs)

SAMs的運作方式為雙方約定一較低的利率，即金融機構承諾貸款者一個低於市場利率水平的固定利率，條件是貸款者必須在未來房價上漲時與金融機構共享增值所帶來的利益。因此，在期初設定貸款時雙方會訂定一個共享比率(share of appreciation)，在貸款到期、重新貸款、或房屋出售時，貸款者必須履行將房屋增值的部分，按共享比率支付給此金融機構的約定。在此機制下，借款者相對於傳統房貸者可享受到較低的固定利率，減輕貸款壓力，提升購屋者負擔房貸的能力；金融機構因使用較低的固定利率也能夠減低潛在的信用風險，減少風險投資的金額，進而提升其資本適足率。

SAMs於理論上可行，但在實際的市場運作，發行之金融機構面臨若干問題。例如，貸款者必須在未來與金融機構共享房屋增值的部分，而金融機構並不會在房價下跌時與貸款者共同承擔損失；亦即，金融機構發行SAMs的期望值恆為正。然而，Shiller & Weiss(2000)認為由於資訊不對稱，貸款者減少維修房屋的誘因導致“投資不足”(underinvestment)，使得到期時的房屋價格因屋況不佳而減少，此種因貸款者疏於維修的行為而衍生“道德風險” (Moral Hazard)的問題。此外，Sanders & Slawson(2005)在SAMs評價模型裡也討論了另一種情況：當購屋者需要購屋時，SAMs有可能會吸引購屋者到房價大多下跌或持平的地區來購買和貸款，這種吸引特定貸款者的問題稱之為“自我選擇” (self-selection)。基於上述SAMs實際操作的若干問題，業界於2009年為因應金融危機所帶來的房市低迷，研發另一貸款商品─“住宅增值參與證券(HAPNs)”。

四、住宅增值參與證券(HAPNs)

一般而言，房屋市場需求者分為兩種：一種將房屋視為消費財，購買者買房是為了長期居住；另一種將房屋視為投資財，即買房是為了投資，當房價上漲時可賺取差價。研發

HAPNs的邏輯是將消費與投資的需求融合在一起，即購屋者將HAPNs出售給投資者，使得房屋貸款的負擔降低，提升其消費能力；HAPNs的價格為房價的某一比例，剩餘的部分為購屋者必須負擔的部分。在出售房屋時，投資者可按事先約定之房屋增值參與率，分擔房價漲跌的盈虧。因此，HAPNs的投資者是購買了分享房價漲跌的參與權，並在房產移轉時，實現投資的盈虧。

(一) HAPNs運作機制

表一的試算，說明HAPNs運作的機制，及在傳統與非傳統型貸款案中，所能發揮之功能比較。所謂非傳統型貸款案，指購屋(貸款)者將HAPNs出售給投資者，降低自身房貸負擔。假設，購屋者購入市價1,000萬的房子，並售出價格為400萬(即房屋價格的40%)的HAPNs，而HAPNs的投資者可享有80%的房屋增值參與率。因此，購屋者僅需自備現金600萬；如果取得95%的貸款成數，購屋者只需承擔30萬的頭期款(另向銀行貸款570萬)。

(二) HAPNs特性

Cassidy et al.(2008)提及HAPNs具有四項特性：(1)利用“區域房價指數”衡量房價漲跌幅；(2)為一零息債券；(3) HAPNs投資者承擔部分房價下跌的風險；(4)在購屋者賣屋時，HAPNs投資者才有報酬。特性(1)的設計可免除前述“道德風險”的疑慮；因為相較於SAMs使用房屋出售價格(sales price)或當下房價估值(stand appraisal)作為共享房價增值的計算基礎，而HAPNs則是依據“區域房價指數”作為房屋增減值的連動。因此，無論屋主疏於照料或細心維護屋況，皆

表一　傳統型與非傳統型貸款案之比較(單位：千元)

	購屋(貸款)者		五年後出售房屋			
			房價上漲50%		房價下跌10%	
	傳統型	售出HAPNs	傳統型	售出HAPNs	傳統型	售出HAPNs
房價	10,000	10,000	15,000	15,000	9,000	9,000
貸款乘數(Loan to Value)	95%	95%				
貸款額	9,500	5,700				
頭期款	500	300				
HAPNs價格		4,000				
房屋增值參與率		80%				
HAPNs投資者報酬(投資額+分享盈虧)				8,000		3,200
HAPNs投資者資本利得(年化報酬率)				14.87%		-4.36%
貸款者售屋損益			5,000	1,000	-1,000	-200
貸款者(年化)報酬率*			8.45%	3.13%	-2.09%	-0.68%

* 貸款者(年化)報酬率的計算不包括房貸利息之支出。

不會影響HAPNs的價格。此外，若屋主因疏忽照顧，使出售時房價成長率低於該區域房價指數成長率時，屋主必須賠償HAPNs投資者此部分的差額；反之，若屋主細心維護屋況，使出售時房價成長率高於該區域房價指數成長率時，這些多餘的增值歸於屋主。如此設計既可使HAPNs 投資者免於疑慮SAMs所涉及之道德風險，又可提供屋主足夠的財務誘因去維護屋況，進而提高兩筆之期望報酬。

HAPNs特性(2)—零息債券，指在到期日之前，購屋者不需要償還任何本金或利息給投資者。倘若未來房價上漲，HAPNs投資者可獲得增值利益；反之，房價下跌時，HAPNs投資者也需負擔損失(特性(3))。不過，HAPNs投資者的損失，最多只是期初的投資額。最後一項特性—HAPNs投資者必須等到購屋者將房屋售出時才能分享盈虧；同時購屋者亦不得提前清償HAPNs投資者，也必須等到售屋後方可與HAPNs投資者按合約比率分配所得。如果購屋者可以提前清償HAPNs投資者，將會傷害此一有價證券(HAPNs)的市場需求與價格，因為提前清償的風險，完全由HAPNs投資者承擔，進而將會影響其最初購買意願，或要求降價以提高期望投資報酬率。綜合上述特性，HAPNs的供給(購屋者)與需求(投資者)誘因同時被考量，不僅可提高購屋者的負擔能力，投資者也因承擔部分的房價波動風險而提高期望報酬。

此表說明“住宅增值參與證券(HAPNs)”在傳統型與非傳統型貸款案中，所能發揮之功能比較。所謂非傳統型貸款案，指購屋者將HAPNs出售給投資者，降低房貸負擔。假設，購屋者購入市價1,000萬的房子，並售出價格為400萬(即房屋價格的40%)的HAPNs，而HAPNs的投資者，可享有80%的房屋增值參與率。如果，取得95%的貸款成數，購屋者只需承擔30萬的頭期款(另向銀行貸款570萬)。假設，五年後房屋抵押貸款到期且購屋者將房屋售出，而房屋售價只有上漲50%和下跌10%兩種情形。

假設，五年後房屋抵押貸款到期且購屋者將房屋售出(此時，HAPNs等同合約到期)，而房屋售價只有上漲50%和下跌10%兩種情形。經試算，傳統型與非傳統型貸款者，所需頭期款分別為50及30萬；而HAPNs的投資者，在房屋售價上漲50% (下跌10%)時，年化報酬率為14.87% (-4.36%)；相較於售出HAPNs的貸款者，其年化報酬率只有3.13% (-0.68%)。(註1)可見，貸款者將房價變動風險，透過“房屋增值參與率”的設定，大多移轉給HAPNs的投資者，而其本身出售HAPNs的動機，則是降低貸款額，進而降低每月繳交的房貸，而非投資利得。

五、定價模型之文獻回顧

相對而言，HAPNs是一個年輕的金融商品，尚未上市發行，學界也未對其設定制式的評價模型。因此，模型設立的來源並沒有太多文獻可供參考。本文訂價HAPNs時，因與“分享增值抵押貸款”的模型架構雷同之處甚多，基於SAMs的架構，加上HAPNs具有不確定的“房產持有期間”(註2)，設計HAPNs之評價模型。根據陳文達等(2002)表示：實務上，房貸證券的定價，並非求出定價方程式左邊的證券價格，而是找出一個能使等號成立的折現利率，此折現率即為房貸證券的期望到期報酬率，或是證券化前後之均衡利率。本文則先推導出使方程式等號成立的“均衡屋主持分率”(α^*)，再折現未來現金流量之期望值，即為當下(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)，並探討兩者與關鍵參數之關聯性及敏感度測值。

(一) SAMs定價模型

Hilliard et al.(1998)模擬SAMs標的物的房產價值與即期利率的隨機過程，估算房價在固定利率房貸定價模型中的變化情形。其中，影響房價的“服務性現金流”也考慮在模型之中，其房價變動的公式如下：

$$\frac{dH}{H} = (\varphi - s)dt + \sigma_H dZ \qquad (1)$$

其中dZ為Wiener過程，φ為房屋總預期報酬，σ_H為房屋價格的標準差，s為服務性現金流，H為目前房價，dH為房價改變幅度和dt為時間改變幅度。並推導出，在風險中立之下，房價波動過程轉變為：

$$\frac{dH}{H} = (r - s)dt + \sigma_H dZ \qquad (2)$$

由於即期利率(r)包含所有未來利率的資訊，在模型(CIR Model)中(Cox et al., 1985)，即期利率變動方程式可表示為：

$$dr = \gamma(\Theta - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} Z_1 \qquad (3)$$

其中，dZ_1為Wiener過程，γ為速度調整項，Θ為靜態環境下的即期利率均值，r為即期利率，dr為利率的變動和σ_r為即期利率的標準差。另Azevedo-Pereira et al.(2002)使用均值回歸利率模型和對數常態分配的房價擴散模型，用以評估英國固定利率房貸契約的違約選擇權價值。作者發現借款者(lender)暴露的房價風險，與貸款者(borrower)選擇權價值、房價、和利率的不確定性有關。

(二) HAPNs評價架構

於美國專利申請公布書(United States Patent Application Publication)中，Cassidy & Yang(2010)提到，當設計配套系統以利發行HAPNs時，必須考慮房屋資產的“參與契約”(participation contract; PC)中，衍生出的參與分享公式，並計算出PC的報酬。首先，作者以區域房價指數(HPI)來定義房屋價格成長率(house price appreciation; HPA)在時間t時，如下表示：

$$HPA_{t,0} = (HPI_t - HPI_0)/HPI_0 \qquad (4)$$

令H_0為期初房價，如果以桌面評價(desk valuation)，則$H_0 = HPI_0$，因此，t期房價(H_t)可表示如下，

$$H_t = H_0 \times (1 + HPA_{t,0}) \qquad (5)$$

因H_0=HPI_0，所以$H_t = HPI_t$；因為房價指數涵蓋各種新舊房屋，因此該指數比較不受折舊率的影響，固其隨機過程的假設，符合幾何布朗運動：$dH = gHdt + \sigma HdW$。作者更設定$HT_{t,j}$為t時

點的目標房價，其中$j \in \{U, L\}$，分別表示較高(upper)與較低(lower)的目標房價，而將t時點的房價，相較於目標房價，分割成三個區塊：較低、持平、和較高房價區。$HT_{t,j}$可表示如下：

$$\mathrm{HT}_{t,j} = \mathrm{H}_0\, e^{r_j t} \qquad (6)$$

其中，r_j為房價年成長率，且$r_L < r_U$。接著，作者按t時點的實際房屋售價(H_S)相較於目標房價$\{HT_{S,L}$，$HT_{S,U}\}$的落點，依下式(7)推估"參與契約"(PC)交割時的現金流量(CF)：

雖然，當$r<g$時，看似不切實際(α< 0)，但可解讀為當房市十分熱絡時，會吸引投資者願意買下房子，然後形成空屋，等待房價上漲的利益。無論如何，由上式(8)可看出：屋主持分率(α)與房價預期成長率(g)呈負相關，與市場利率(r)呈正相關；意謂著在房價越高度成長的區域，投資者持分率(1-α)越大，又當市場利率越高時投資者持分率越少，並可能因而降低其投資HAPNs的意願，或願意支付HAPNs的價格降低。另外，α和t呈正相關，顯示"賣屋時距"的長短對投資HAPNs意願的影響。亦即如果屋主"賣屋時距"較長，將降低投資者的投資意願，或其願意支付較低的金額來購買HAPNs。上述定性分析及經濟意涵，將與本文模擬結果一一比對與驗證。

(三) 房產持有期間的不確定性

由於屋主賣房後，HAPNs投資者才能分享盈虧，因此，投資者不能確定其投資期間的長短。本文將此"不確定房產持有期間"的議題，納入HAPNs的評價模型。Maris & Yang(1996)表示當房貸有效年限為隨機變數時，可用間斷時間選擇權定價模型，評價該房貸價值與其隱含的提前清償選擇權的價值。亦即，作者假設"房貸有效年限"依照Gamma分配，呈現其隨機性，以探討提前清償的問題。例如，貸款者會在市場利率變低時，可能執行提前清償房貸的選擇權，而使房貸有效年限縮短。然而，大部分的固定利率房貸，附有"立即到期條款"(due-on-sale clause)。一般附有立即到期條款的房貸契約，會因下列三種原因而令該條款生效：(1)賣出房屋；(2)借新房貸而提前清償舊房貸；或(3)自力還清房貸。實際上，最終房貸有效年限，主要會因為(1)或(2)項而改變，而非原本設定的年限。因此，貸款者持有房屋期間的長短，會是一個影響房貸抵押價值和決定是否重新貸款的重要因素。

Maris and Yang(1996)更依據(1) Chen and Ling(1989)的隨機房貸有效年限的定價模型，和(2) Chang and Jack(1991)定價歐式股票買權的概念，當房貸到期

$$\mathrm{CF(PC)} = \begin{cases} D_L(H_S - HT_{S,L}), & if\ \ H_S \le HT_{S,L} \\ D_C(H_S - HT_{S,L}), & if\ HT_{S,L} \le H_S \le HT_{S,U} \\ D_C(HT_{S,U} - HT_{S,L}) + D_U(H_S - HT_{S,U}), & if\ H_S \ge HT_{S,U} \end{cases} \qquad (7)$$

其中，D_L、D_C、和D_U分別為交割房價落於較低、持平、和較高的目標房價區時，PC投資者所得分配的比率，而H_S為房產的實際售價(sales price)。例如，D_L=1.0，即所有房價(指數)下跌之損失，全數由PC投資者承擔；D_U=0.9，即PC投資者可以獲得H_S和$HT_{S,U}$差價的90%；D_C=0，即PC投資者在H_S跌至持平目標房價區時($HT_{S,L} \le H_S \le HT_{S,U}$)，將無法得到任何報酬。又例如，若

D_L=D_C=D_U，且則$HT_{S,L}$=H_0，表示PC投資者承擔一定比率之房價(指數)下跌的風險，不論房屋售價落在那個區塊。因此，本文設計之HAPNs，提供多元現金流量分配的組合，供投資者與購屋者，依各自風險偏好選擇之。綜合前述，“參與契約(PC)”的內涵價值將受未來房價指數、PC投資者分擔比率、和利率所影響，而藉由房產交割時估計之現金流量(CF)，即可推算出PC的內涵價值。

Yang(2007)按房產所有權分離的概念，將房屋市價(H)拆分成兩部分：其中為房屋持有者擁有，另(1–α)H屬於HAPNs投資者。(註3)假設房價預期成長率為g，市場利率為r。在完全市場中，HAPNs投資者的報酬，可用兩種方式計算：一、將無風險零息債券(e^{rt})乘上原始投資額((1–α)H_0)，加上一區域房價指數(HPI)期貨的價值；二、在賣出當天，房屋持有者得到αH_0，而HAPNs投資者得到H_0e^{gt}–αH_0。如果，HPI如同房價預期成長g倍時，則利用下式(8)，可推導出屋主持分(α)。

$$(1-\alpha)H_0e^{rt} = H_0e^{gt} - \alpha H_0$$

$$H_0(e^{rt} - e^{gt}) = \alpha H_0(e^{rt} - 1) \qquad (8)$$

$$\alpha = \frac{e^{rt} - e^{gt}}{e^{rt} - 1}$$

是隨機資訊時，來推算附有立即到期條款的抵押房貸價值。綜合上述，本文假設貸款購屋者持有房產有效年限，依照Gamma分配，公式如下：

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\theta^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-x/\theta},\ 0 \le x \le \infty \qquad (9)$$

其中，$\Gamma(\beta)$ 被定義如下式：

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} u^{\beta-1} e^{-u} du,\ 0 < \beta \qquad (10)$$

再者，貸款購屋者持有房產有效年限之平均數與變異數分別為$\mu = \beta\theta$和$\sigma^2 = \beta\theta^2$。反之，如果貸款者持有房產期間的期望值為μ年，標準差為σ年，則Gamma分配的參數(β,θ)可表示為：

$$\beta = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \text{和 } \theta = \frac{\sigma^2}{\mu} \qquad (11)$$

令F(t)和S(t)分別為累積機率分配和生存者函數(survival function)為下式：

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx \quad \text{和} \quad (t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx \qquad (12)$$

另，定義危險函數(hazard function; h(t))為在t時間點，標的房產尚未被賣出的前提下，賣出房產之事件的機率，則h(t)可表示如下：

$$h(t) = P(x = t|T \ge t) = \frac{f(t)}{S(t)} \qquad (13)$$

綜合上述，本文從HAPNs投資者的角度，評價HAPNs時，設定屋主的“賣屋時距”或“房產持有期間”依照Gamma分配，以呈現其隨機性。並在屋主賣屋的時間點，按照HAPNs投資者的期初投資金額的無風險報酬，等於其所分配之期望現金流量的理性預期，推導出屋主持分率(α)，或投資者持分率(1-α)。以下章節，將就HAPNs評價模型、模擬結果、與討論分析，一一陳述。

六、HAPNs定價模型

(一) 模型架構與定價流程

本文以美國聯準會之房價財務管理中心(Federal Housing Finance Agency)所公布的區域房價指數 (HPI)，來定義三個目標房價區塊：較低、持平、和較高區(如式(6))，並依照屋主在t時點的實際交割房價(H_S)落入的目標房價區塊，來決定分配給HAPNs投資者的現金流量(如式(7))。假設D_L、D_C、和D_U分別為交割房價落於較低、持平、和較高的目標房價區時，HAPNs投資者所得分配的比率，而此三比率將是HAPNs契約設計的關鍵參數。進而，依理性預期的觀點，推導出屋主持分率(α)，或投資者持分率(1-α)。首先假設HPI為符合幾何布朗運動之隨機過程，即

$$\frac{dHPI}{HPI} = \mu_{HPI}dt + \sigma dZ_1 \quad (14)$$

其中，μ_{HPI}為區域房價指數之期望報酬率，σ為報酬率之標準差，而dZ_1為Wiener過程。根據Girsanov定理，存在一風險中立機率測度Q，經此機率測度轉換後，新的HPI隨機過程如下：

$$\frac{dHPI}{HPI} = \mathrm{r}dt + \sigma dW_1 \quad (15)$$

經此測度轉換，任何HPI函數之現值，$f(HPI_T)e^{-rT}$，符合Martingale過程。

另外，本文參考Yang(2007)，設定HAPNs投資者期初出資$(1-\alpha)H_0$，如將此投資金額投資在無風險資產上，在t時點，將產生$(1-\alpha)H_0e^{-rT}$之期望報酬；但是，如將此等量金額購買HAPNs，當屋主在t時點售出房產後，HAPNs投資者將可獲得$(1-\alpha)H_0+E(CF(PC))$之期望報酬(如式(7))。在風險中立機率測度下，令投資無風險資產和HAPNs，有相同的期望報酬，則合理的α值，應是下式(16)的解。

$$(1-\alpha)H_0e^{rt} = \mathrm{E}\ \{(1-\alpha) + \mathrm{CF(PC)}\} \quad (16)$$

其中“參與契約(PC)”中，投資者預期交割時，未來現金流的期望值，E{$CF(PC)$}，可以結合式(7)和(8)得出如下，

$$E\{CF(PC)\} = D_L\left\{H_0e^{gt}N\left(\frac{a-\sigma t}{\sqrt{t}}\right) - H_{t,L}N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right\}$$

$$+D_C\left\{H_0e^{gt}\left[N\left(\frac{b-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)-N\left(\frac{a-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)\right]-H_{t,L}\left[N\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)-N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right]\right\}$$

$$+D_C\left(H_{t,U}-H_{t,L}\right)N\left(\frac{-b}{\sqrt{t}}\right)$$

$$+D_U\left\{H_0e^{gt}\left[1-N\left(\frac{b-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)\right]-H_{t,U}\left[1-N\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)\right]\right\} \quad (17)$$

其中$a=\dfrac{\ln\frac{H_{t,L}}{H_0}-\left(g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma}$和$b=\dfrac{\ln\frac{H_{t,H}}{H_0}-\left(g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma}$。

因此，在屋主的"賣屋時距"或"房產持有期間"t已知的情況下，

$$\alpha=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{rt}}-1)\mathrm{H}_0-\mathrm{E}\left\{\mathrm{CF}\left(\mathrm{PC}\right)\right\}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{rt}}-1)\mathrm{H}_0}=1-\frac{\mathrm{E}\left\{\mathrm{CF}\left(\mathrm{PC}\right)\right\}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{rt}}-1)\mathrm{H}_0}$$

假設t (房產持有期間)為隨機變數如Gamma分配，其機率密度函數為f(t)，則"均衡屋主持分率(α*)"，應為下式(18)之解：

$$\int_0^\infty(1-\alpha)H_0e^{rt}f(t)dt=\int_0^\infty\left\{(1-\alpha)H_0+E\left(CF\left(PC\right)\right)\right\}f(t)dt \quad (18)$$

如果定義$\int_0^\infty g(t)f(t)=E\left(g(t)\right)$，則

$$(1-\alpha)H_0\left[E\left(e^{rt}\right)-1\right]=E\left(CF\left(PC(t)\right)\right)$$

$$1-\alpha=\frac{E\left(CF\left(PC(t)\right)\right)}{H_0\left[E\left(e^{rt}\right)-1\right]}\Rightarrow\alpha=1-\frac{E\left(CF\left(PC(t)\right)\right)}{H_0\left[E\left(e^{rt}\right)-1\right]} \quad (19)$$

因此式(18)不是非線性方程式，而且α*有唯一解(註5)，對於HAPNs投資者，當屋主賣房後可分得現金流量之期望值為$(1-\alpha^*)H_0$+E(CF(PC))；因為屋主之"房產持有期間"符合機率密度函數為f(t)之Gamma分配，因此，折現上述現金流量之期望值，即為當下 (對投資者而言) HAPNs的價值(H*)：

$$H^*=\int_0^\infty\left[\left(1-\alpha^*\right)H_0+E\left(CF\left(PC\right)\right)\right]e^{-rt}f(t)dt \quad (20)$$

推導出"均衡屋主持分率"(α*)及當下HAPNs價值(H*)後，並探討其與關鍵參數之相關性及敏感度測值；關鍵參數包括：區域房價指數之標準差(σ)、Gamma分配的參數(β,θ)、無風險利率(r)、房價高(低)年成長率，即r_U (r_L)、以及若交割房價落於較低、持平、和較高的目標房價區

時，HAPNs投資者所得分配的比率(D_L、D_C、和D_U)。

(二) 模擬過程

首先，設定一α值，進行10萬次模擬；每次模擬先模擬每期房價指數和利率之數值，接著按照Gamma分配抽出第i個房貸的到期日t_i', i=1, 2, 3....,並令 $t_i = \frac{[12t_i'] + 1}{12}$ ，其中[.]為高斯符號(確保第$12t_i$為整數)，再以模擬出的120個t_i，計算120個$\varepsilon_i = (1-\alpha)H_0 - \frac{(1-\alpha)H_0 + CF_{t_i}(PC)}{e^{rt_i}}$的平均值$\bar{\varepsilon}$；繼而，模擬10萬次，計算10萬個$\bar{\varepsilon}$的平均值；變動$\alpha$，使該10萬個$\bar{\varepsilon}$平均值之絕對值小於$10^{-6}$。當$\alpha$值求出後，針對每次模擬出之$t_i$，按照方程式(14) 模擬第$i$個房價指數，並根據方程式(7)，計算HAPNs投資者在t_i時點的現金報酬$\{(1-\alpha)H_0+CF_{t_i}(PC)\}$；並將此報酬折現，即為當下HAPNs的價值。最後，計算120筆HAPNs之平均淨現值，如此模擬10萬次，取其均值即為HAPNs之合理價值。

七、模擬結果

本文房價有關的參數設定，參照Yang et al. (2011)；無風險利率及房價指數高年成長率(r_U)均為美國長期公債殖利率的平均值，作為在風險中立模型下，比較的基礎；而Gamma分配的參數(β,θ)依照美國平均房屋持有期間為5年之事實作為設定的依據；至於房價指數低年成長率r_L=0及HAPNs投資者於房屋售價落於較低、持平或較高區塊時，現金流所得的分配比率(D_L, D_C, D_U)之初始值，則是參考台灣房地產市場現況，由本文設定。表二列出模擬參數初始值之設定，以研究屋主賣房後，(對投資者而言) HAPNs的價值(H*)及"均衡屋主持分率"(α*)與各項關鍵參數間的關係。關鍵參數包括房價指數報酬率之標準差(σ)、Gamma分配之參數、無風險利率(r)、房價指數高(低)年成長率，即r_U(r_L)、以及若交割房價落於較低、持平、和較高的目標房價區時，HAPNs投資者所得分配的比率(D_L、D_C、和D_U)，進行比較分析，並探討其對H*與α*的影響。

利用這組參數代入第(18)式，藉以得到一合理之利益分享比例(D_L, D_C, D_U)，使HAPNs投資者在風險中立機率測度下，投資無風險資產與投資HAPNs，具有相同的現金流量預期值，進而得一"均衡屋主持分率"(α*)值為0.3172。即，房貸客自有資金加上向銀行的貸款，為房屋原始價值的31.72%，或HAPNs價格為原始房價的68.28%。以下，藉由比較靜態分析，於屋主賣房後，進行(對投資者而言) HAPNs的價值(H*)相對於各項參數之敏感度探討。

由圖一、二，可看出區域房價指數報酬率之標準差(σ)與H* 呈反向關係，而與"均衡屋主持分率"(α*)呈正相關。此結果可解讀為：當σ越大，房價或房價指數的波動率也越高，即該區房價市值的漲跌也越劇烈，則t時點的實際房屋售價大於$HT_{S,U}$與低於$HT_{S,L}$的機率也隨之增加，使購屋者承擔較大的房價漲跌風險。然而，在HAPNs的設計中，相較於房價上漲利益的分享比例，通常HAPNs投資者將分擔較大的房價下跌之風險。例如，本文初始設定D_L=1>D_U=0.4，即實際房屋售價低於$HT_{S,L}$時，HAPNs投資者需承擔100%的下跌損失；當$H_S \geqq HT_{S,U}$時，只能分享40%的上漲利益。因此，當σ增加，使得HAPNs價值(H*)及"均衡HAPNs投資者持分率"(1-α*)減少，或α*變大。

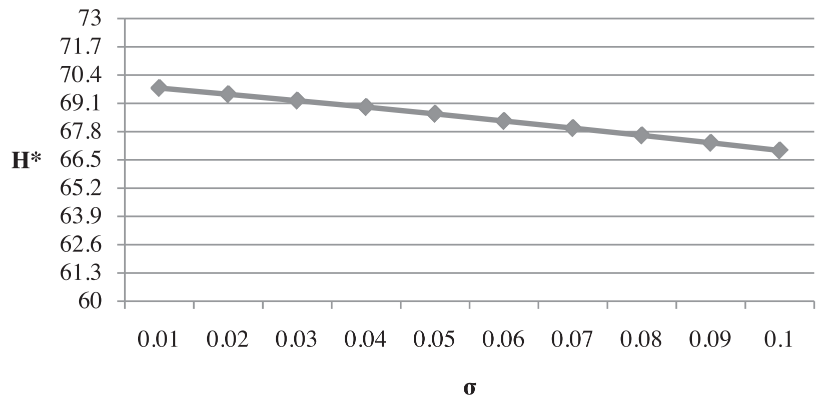
表二　隨機過程模擬參數設定表

參數名稱	設定值
初始房價指數(HPI_0)	100
期初房價(H_0)	100
房價指數報酬率之年標準差(σ)	0.06
HAPNs投資者於房屋售價落於較低、持平或較高區塊時，現金流所得的分配比率(D_L, D_C, D_U)	(100%, 80%, 40%)
房價指數高年成長率(r_U)	0.04
房價指數低年成長率(r_L)	0
房貸成數(LTV)	85%
無風險利率(r)	0.04
Gamma分配參數(β, θ)	(0.5, 10)
平均換屋期間(年)	5
模擬最大誤差	10^{-6}

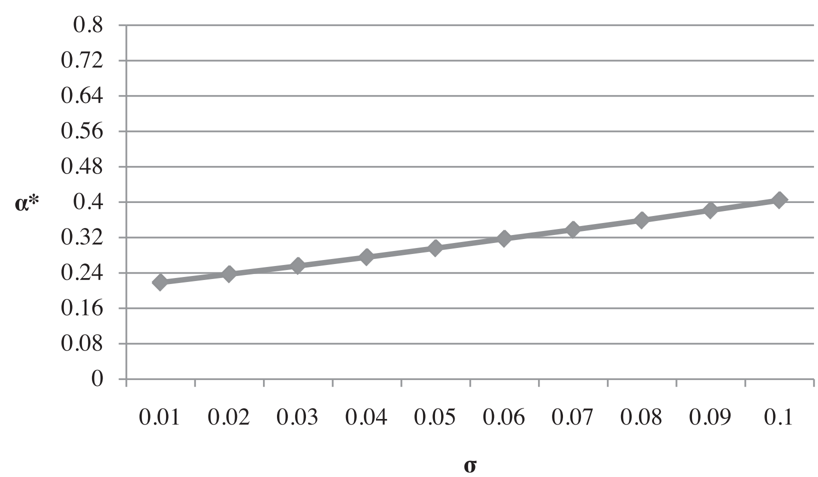
圖一、二中呈現模擬結果，顯示屋主賣房後，(對投資者而言) HAPNs的價值(H*)及“均衡屋主持分率”(α*)與區域房價指數報酬率之標準差(σ)間的關係。

另外，從圖三至六，可知Gamma函數的參數(β,θ)與HAPNs的價值(H*)均呈正向關係，而與“均衡屋主持分率”(α*)呈反向關係，此結果可解讀為：當β或θ變大，意謂屋主賣房平均耗時延長；因為t年後區域房價指數之總期望報酬率與時間成正比，而其標準差與時間開根號成正比。亦即，若區域房價指數之平均年報酬率與標準差分別為(μ，σ)，t年後其持有期間平均報酬率為μt，而標準差為$\sigma\sqrt{t}$。因此，越晚賣屋，實際房屋售價(H_S)低於目標下限房價($HT_{S,L}$)的機率越低。以表二設定之模擬參數初始值為例，一年後，$H_S \leqq HT_{S,L}$的機率為$P\left(z<\dfrac{0-0.04}{0.06}\right)=0.2625$，而$H_S \geqq HT_{S,U}$的機率為$P\left(z<\dfrac{4\%-4\%}{0.06}\right)=0.5$；若是9年後賣屋，$H_S \leqq HT_{S,L}$的機率降低為$P\left(z<\dfrac{0-0.04*9}{0.06*\sqrt{9}}\right)=0.02275$，但是，$H_S \geqq HT_{S,U}$的機率幾乎不變($P\left(z>\dfrac{4\%*9-4\%*9}{0.06*\sqrt{9}}\right)=0.5$)。因此，越晚賣屋，對HAPNs投資者越有利，HAPNs價值越大，“均衡HAPNs投資者持分率”(1-α*)越大，或α*越小。

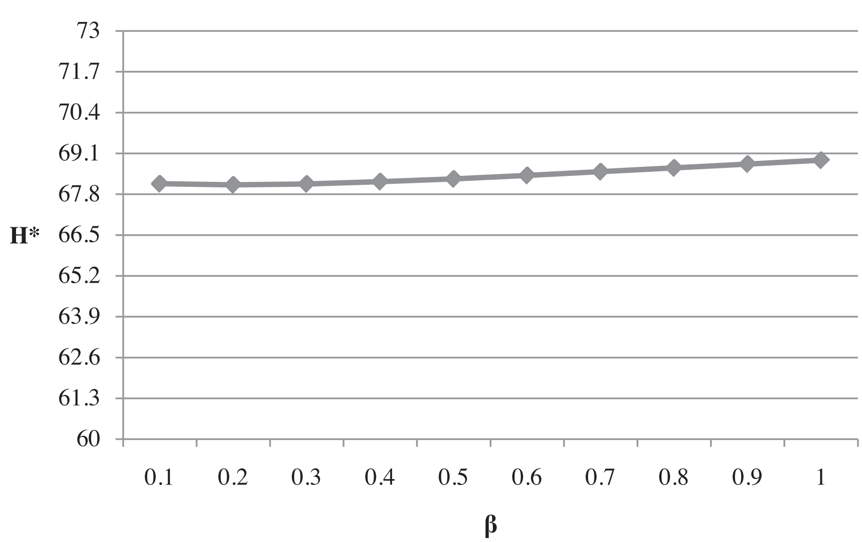
圖七、八顯示，隨無風險利率(r)的增加，HAPNs的價值(H*)與“均衡HAPNs投資者持分率”(1-α*)，均呈現先增後減的趨勢。此結果可解讀為：無風險利率對H*所產生的邊際正負效應拉扯的結果，而在低利率時期正效應勝出。當無風險利率增加時，房價(指數)平均成長率及購買HAPNs的機會成本(負效應)也將隨之增加。當房價(指數)平均成長率增加，$H_S \leqq HT_{S,L}$的機率減少，將使HAPNs投資者承擔較小的房價下跌風險(正效應)。另外，如本文初始設定D_L=1>D_U=0.4，即$H_S \leqq HT_{S,L}$時，HAPNs投資者需承擔100%的下跌損失；而當$H_S \geqq HT_{S,U}$時，只能分享40%的上漲利益，此不對稱設計所產生的槓桿效應(leverage effect)，使投資者當無風險利率超過一定水準後，投資HAPNs的機會成本(負效應)遠大於當$H_S \geqq HT_{S,U}$時，所能分享的利益(正效應)，進而減少HAPNs的投資(α*變大)。



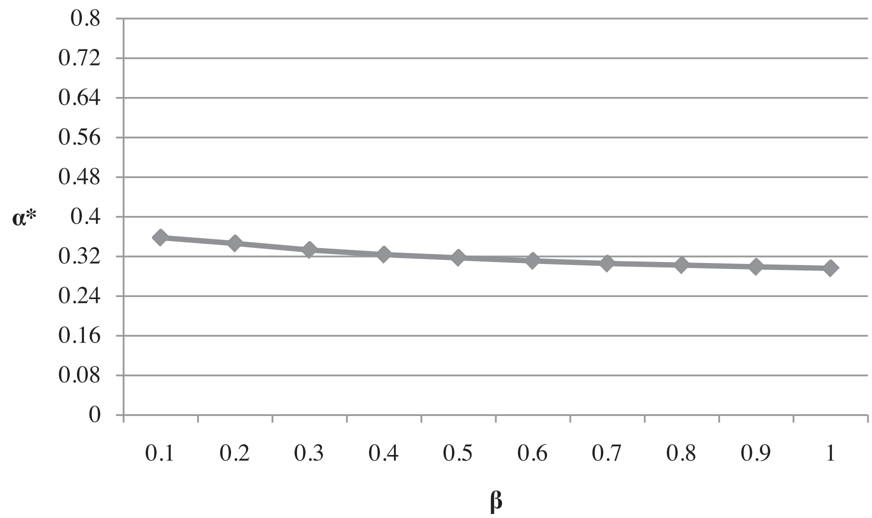
圖一　(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)與σ的關係



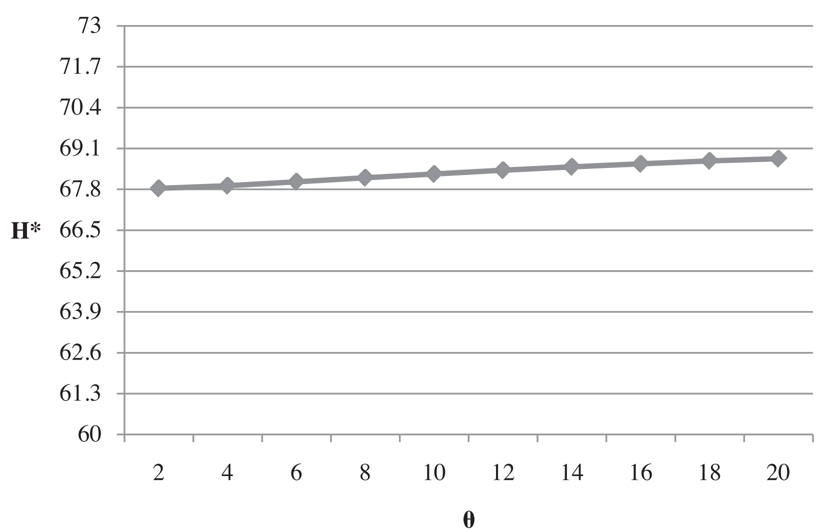
圖二　"均衡屋主持分率"(α*)與σ的關係



圖三　(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)與β的關係



圖四 "均衡屋主持分率"(α*)與β的關係



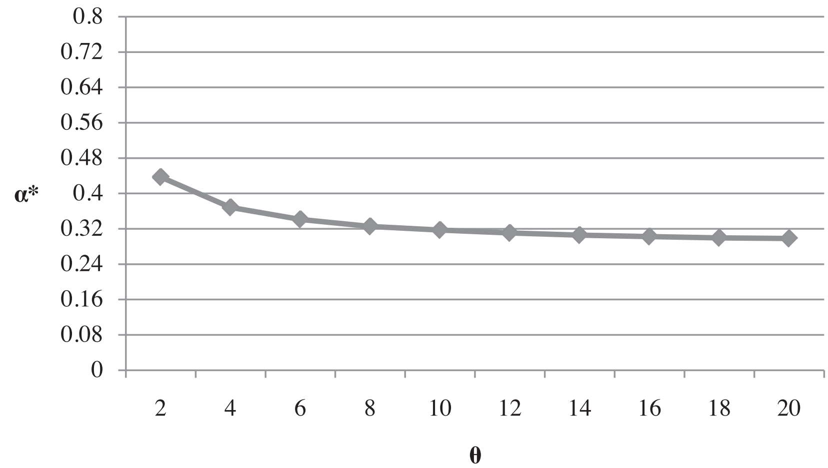
圖五 (對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)與θ的關係

圖三、四中呈現模擬結果，顯示屋主賣房後，(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)及"均衡屋主持分率"(α*)與Gamma分配之參數間的關係。

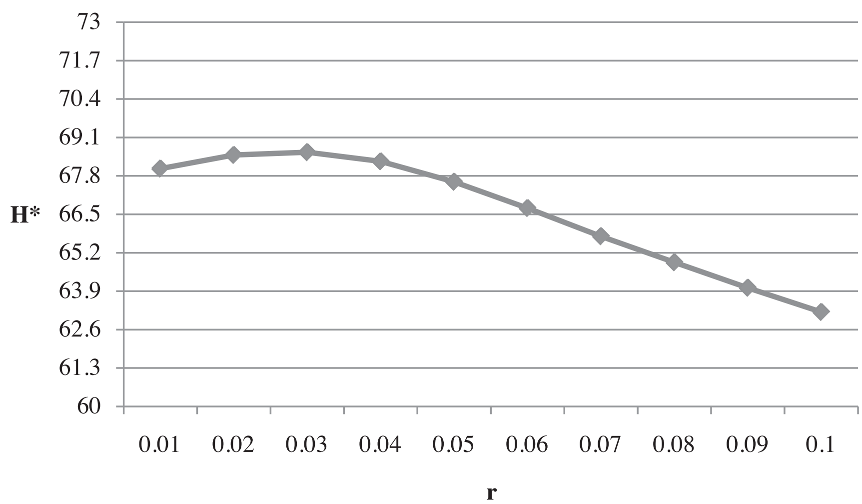
圖五、六中呈現模擬結果，顯示屋主賣房後(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)及"均衡屋主持分率"(α*)與Gamma分配之參數(β,θ)間的關係。

圖七、八中呈現模擬結果，顯示屋主賣房後，(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)及"均衡屋主持分率"(α*)與無風險利率(r)參數間的關係。

圖九、十中呈現模擬結果，顯示屋主賣房後，(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)及"均衡屋主持分率"(α*)與房價高(低)年成長率，即r_U(r_L)參數間的關係。



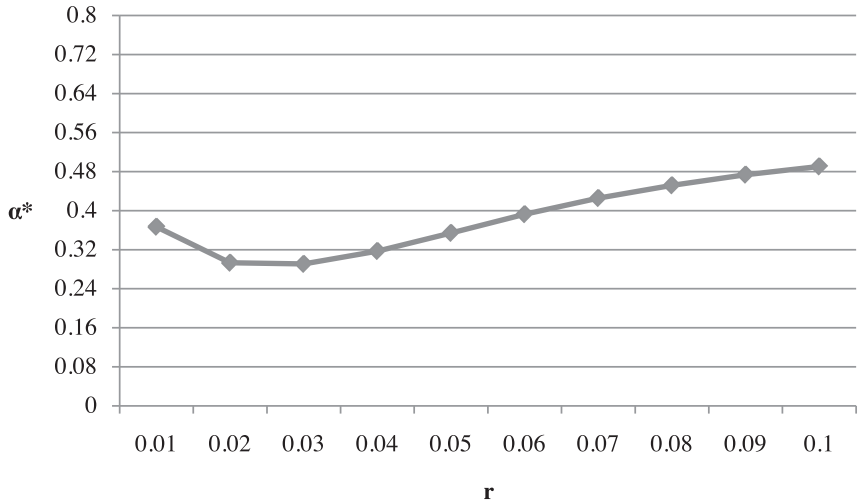
圖六　“均衡屋主持分率”(α*)與θ的關係



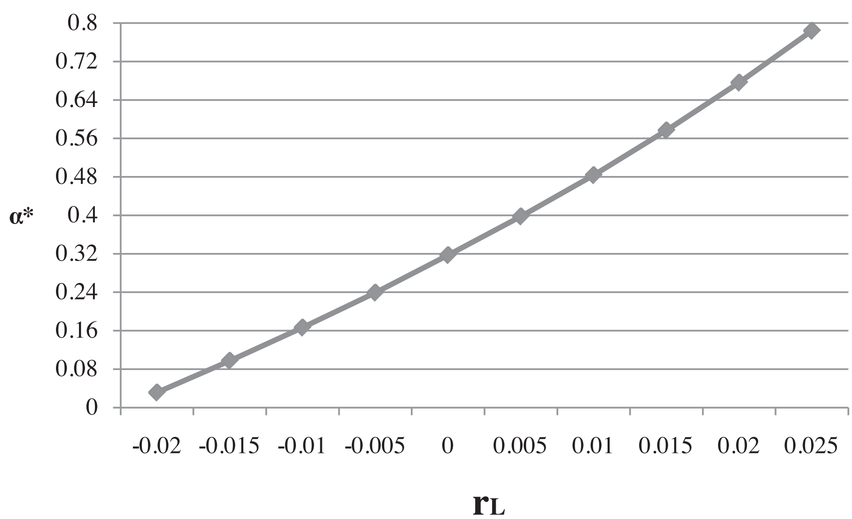
圖七　(對投資者而言) HAPNs的價值(H^*)與r的關係

圖十一、十二、十三中呈現模擬結果，顯示屋主賣房後，“均衡屋主持分率”(α*)與交割房價落於較低、持平、和較高的目標房價區時，HAPNs投資者所得分配的比率(D_L、D_C、和D_U)各項參數間的關係。

理論上，制定目標房價指數之高(低)成長率，$r_U(r_L)$，與HAPNs投資者之利潤分享比率(D_L, D_C, D_U)在HAPNs合約中早已訂好，因此會影響“均衡屋主持分率”(α*)，但不會改變HAPNs的市場價值。由圖九、十可知，$r_L(r_U)$與α*呈現正(反)向關係；此結果可解讀為：當r_L增加，使$H_S \leqq HT_{S,L}$的機率增加，進而使α*變大；當r_U增加時，雖然減少$H_S \geqq HT_{S,U}$的機率，但同時也會增加$HT_{S,L} \leqq H_S \leqq HT_{S,U}$的機率，加上本文設定利潤分享率$D_C$=0.8及$D_U$=0.4，使其淨效應產生$r_U$與α*呈現反向變動的關係。至於圖十一至十三的結果：HAPNs投資者之利潤分享率(D_L, D_C, D_U)均與α*呈現幾乎不變或負相關的現象，不言可喻。



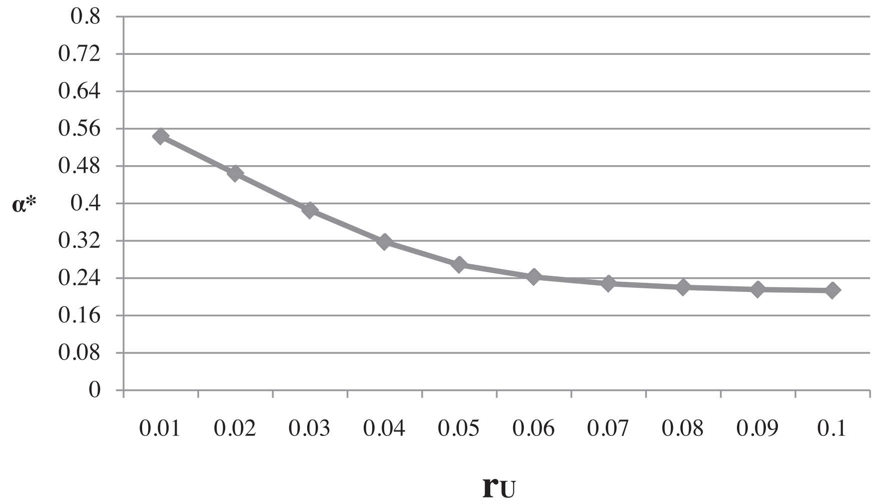
圖八　“均衡屋主持分率”(α*)與r的關係



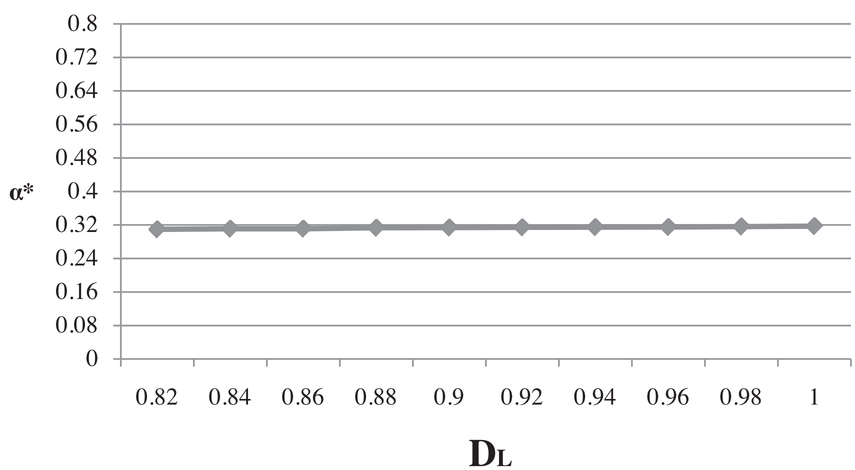
圖九　“均衡屋主持分率”(α*)與r_L的關係

模擬結果顯示，當區域房價指數之報酬率愈波動，HAPNs (對投資者)價值愈小，因此“均衡HAPNs投資者持分率”(1-α*)愈少；反之，屋主越晚賣屋，或“房產持有期間”越長，對HAPNs投資者越有利，HAPNs價值越大，其持分率也越大。無風險利率對H*的影響，呈現先增後減的趨勢；即在低利率時期，HAPNs價值隨之增加，當無風險利率超過一定水準後，投資HAPNs的機會成本(負效應)遠大於投資者所能分享的利益(正效應)，進而減少HAPNs的投資，此結果主因HAPNs不對稱分享機制之設計，所產生的槓桿效應(leverage effect)。

制定目標房價之高(低)房價成長率，$r_U(r_L)$，與HAPNs投資者之利潤分享比率(D_L, D_C, D_U)，雖與HAPNs價值變化無關，仍會影響“均衡投資者持分率”，而此持分率，實際上，也是投資者取得分配房產售後金流權利所需付出之權益金。所以，較高的目標房價下限(r_L)，使房價低

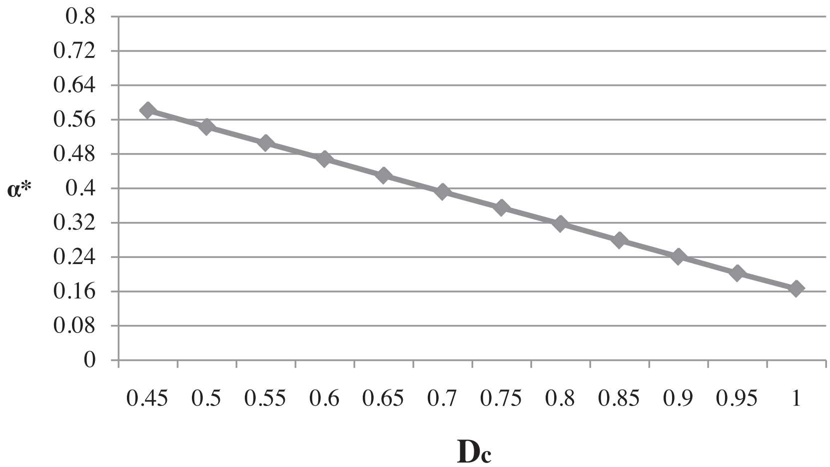


圖十　“均衡屋主持分率”(α*) 與r_U的關係

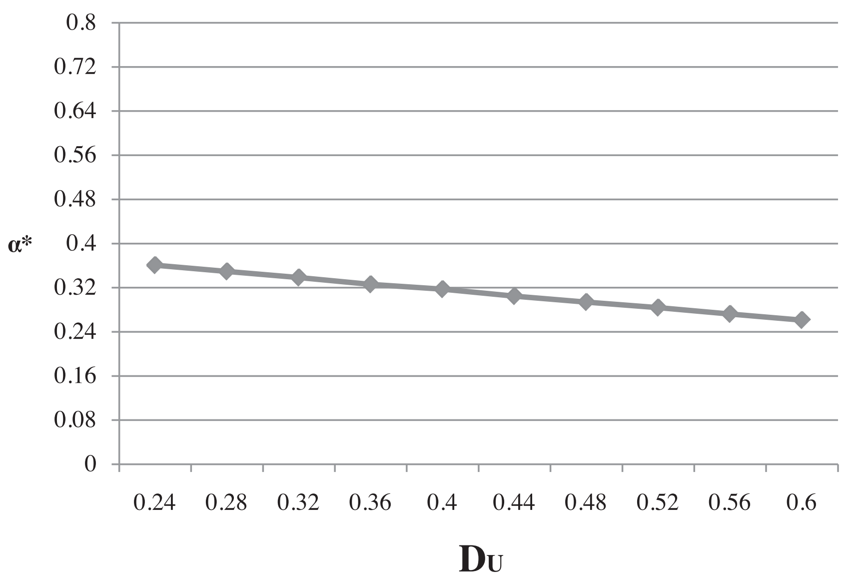


圖十一　“均衡屋主持分率”(α*) 與D_L的關係

於合約中表明的下限($H_S \leqq HT_{S,L}$)的機率增加，投資者分擔較大的房價下跌風險，而降低其持分率的結果，符合預期。反之，較高的目標房價上限(r_U)，雖然減少房價高於合約中表明的上限($H_S \geqq HT_{S,U}$)的機率，但同時也會增加房價介於合約中表明的上下限區間($HT_{S,L} \leqq H_S \leqq HT_{S,U}$)的機率，加上本文設定利潤分享率$D_C$=0.8 >$D_U$=0.4，其淨效應使投資者分享房價上漲利潤的機率增加，而願意付出較高的權益金。至於，HAPNs投資者之利潤分享比率，均與α*呈現幾乎不變(D_L)或負相關(D_C, D_U)的結果，亦符合預期。



圖十二 “均衡屋主持分率”(α*)與D_C的關係



圖十三 “均衡屋主持分率”(α*)與D_U的關係

八、結論

本文從投資者觀點為“住宅增值參與證券”，設計一更具彈性且符合實務之定價模型，以順暢投資者與購屋者各取所需之交易平台。除考量房價的隨機過程外，本文應是首先將屋主之“房產持有期間”設為隨機變數，並按實際房屋售價的落點，設計投資者階段分配房價漲跌盈虧的機制，置入於HAPNs定價模型的文章。如此設計，可排除既有之類似商品“分享增值抵押貸款”所導致“投資不足”及“道德風險”的問題。本文並針對投資者分配盈虧比率及無風險利率等關鍵參數，對於HAPNs價值(H^*)與“均衡屋主持分率”(α*)的影響，進行比較靜態分析。

模擬結果中，將房屋持有期間納入考慮為本文之主要貢獻，基本上文中Gamma分配的參數就是在討論房屋持有期間的影響，房屋持有平均期間會使HAPNs價值增加，此部分已在模擬結果有大篇幅說明。因為房屋持有期間和HAPNs的價值呈正向關係，因此購屋者越晚出售房屋，HPNs價值越高。期望投資者能夠了解此一特性，購屋者將房屋越晚售出，便可以較高的價格在次級市場賣出，對於市場顧慮購屋者遲遲不賣房子不利HAPNs的推出，這問題將不會繼續存在。其實這個結果或許是推行HAPNs資產的一有利說服點，因為HAPNs一直存在著一個問題，即是若購屋者遲遲不賣屋，則HAPNs的獲利無法確定，這問題若有次級市場應無問題，所以積極推動次級市場才是HAPNs成功的關鍵。

HAPNs設計的邏輯，在於將房產所兼具之消費財與投資財的功能分離，使購屋者、投資者、金融機構、與政府有關部門各取所需。例如，購屋者取得HAPNs的售款，使其相對於傳統房貸者，享受較低的房貸利率，可減輕其自備款及房貸的壓力，購房能力因而提高；投資者，也可在合理的階段分配房價漲跌盈虧的機制設計下，免於屋主因誘因不足而疏於維持屋況，進而影響房屋售價，衍生"道德風險"的顧慮；金融機構，因使用較低的房貸利率，降低潛在的信用風險，減少風險投資的金額，進而提升其資本適足率；而HAPNs市場化的持續發展，更有助於政府有關部門效能的提升：例如，住者有其屋政策的推動、民眾房宅自有率的提升、及不動產與資本市場的更加健全。

未來HAPNs推廣的問題尤為關鍵，HAPNs將住宅的投資財出售，一般民眾可以較低的價格購得住宅。目前市場上的的租賃者也能具備購屋能力。長期下來，將擴增購屋市場需求，減少無殼蝸牛，亦保障民眾的居住權利及生活品質。而對於HAPNs投資者等同購買部分資產並對房貸戶資產下跌做保險，只要價格(保費)合理，在大數法則下，保險公司應會對此類投資商品有興趣。畢竟在美國都有保險公司願意對房價下跌承作保險，同時其投資組合也持有部分房地產資產，因此政府對保險公司應盡善加說明的責任，讓其更深度瞭解HAPNs性質，定有助於HAPNs商品的推廣。

註　　釋

註1：計算貸款者(年化)報酬率時，不包括房貸利息之支出。

註2：由於購屋者賣房時，HAPNs投資者才能分享盈虧。因此，投資者不能確定此投資時間長短。

註3：Yang (2007)假設(1)房屋市價與區域房價指數相同，及(2)區域房價指數上漲部分(HPA)完全反映在售價上。

註4：式(17)的推導，請見附錄一。

註5：感謝一匿名評審提醒，特加此說明。

參考文獻

中文部分：

陳文達、李阿乙、廖咸興

2002 《資產證券化理論與實務》，台北：智勝文化。

Chen, W. D., A. Lee & H. H. Liao

2002 *Asset Backed Securitization: Theory and Practice*. Taipei: BestWise Co.

楊太樂

2009 〈住宅增值參與證券：降低民眾住宅負擔新方案：一個可負擔且持續的住宅所有權之新方案〉《住宅學報》18(1)：89-92。

Yang, T. T.

2009 "Home Appreciation Participation Notes (HAPNs)- A New Way Affordable and Sustainable Homeownership," *Journal of Housing Studies*. 18(1): 89-92.

英文部分：

Azevedo-Pereira, J. A., D. P. Newton & D. A Paxson

2002 "UK Fixed Rate Repayment Mortgage and Mortgage Indemnity Valuation," *Real Estate Economics*. 30(2): 185-211.

Cassidy, H. J., B. Dennis & T. T. Yang

2008 "Home Appreciation Participation Notes: A Solution to Housing Affordability and the Current Mortgage Crisis," *International Real Estate Review*. 11(2): 126-141.

Cassidy, H. J. & T. T. Yang

2010 "Home Appreciation Participation Notes," *United States Patent Application Publication*. 12: 436, 891.

Chen, A. H. & D. C. Ling

1989 "Optimal Mortgage Refinancing with Stochastic Interest Rates," *Real Estate Economics*. 17(3): 278-299.

Chang, C. W. & S. K. Jack

1991 "Binomial Pricing: a Generalization," *Working Paper,* University of Southern California.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll & S. A. Ross

1985 "A Theory of the Term Structure of Interests Rates," *Econometrica*. 53(2): 385-407.

Hilliard, J. E., J. B. Kau & V. C. Slawson Jr.

1998 "Valuing the Prepayment and Default Options in a Fixedrate Mortgage: a Bivariate Binomial Options Pricing Technique," *Real Estate Economics*. 26(3): 431-468.

Maris, B. A. & T. T. Yang

1996 "Mortgage Prepayment with an Uncertain Holding Period," *Journal of Real Estate Finance and Economics*. 12(2): 179-194.

Sanders, A. B. & V. C. Slawson Jr.

2005 “Shared Appreciation Mortgages: Lessons from the UK,” *Journal of Housing Economics*. 14(3): 178-193.

Shiller, R. J. & A. N. Weiss

2000 “Moral Hazard in Home Equity Conversion,” *Real Estate Economics*. 28(1): 1-31.

Yang, T. T.

2007 “Home Ownership: Unbundle Housing Ownership with the Home Appreciation Participation Certificate (HAPN),” *working paper*, Integrated Financial Engineering (IFE).

Yang, T. T., C. C. Lin & M. Cho

2011 “Collateral Risk in Residential Mortgage Defaults,” *Journal of Real Estate Finance and Economics*. 42(2): 115-142.

附錄一

如果HAPNs投資者，按照Cassidy and Yang(2010)提及之“參與契約”(participation contract; PC)中，參與未來現金流(CF)的分享機制，本附錄推導出投資者預期交割時，其所得現金流的期望值，E{*CF*(*PC*)}，即方程式(17)。首先由式(7)可知，

$$\mathrm{CF(PC)} = \begin{cases} D_L\left(H_S - HT_{S,L}\right), & if\ \ H_S \le HT_{S,L} \\ D_C\left(H_S - HT_{S,L}\right), & if\ HT_{S,L} \le H_S \le HT_{S,U} \\ D_C\left(HT_{S,U} - HT_{S,L}\right) + D_U\left(H_S - HT_{S,U}\right), & if\ H_S \ge HT_{S,U} \end{cases} \quad \text{......} (7)$$

假設房價指數(H)符合幾何布朗運動，$dH{=}gHdt{+}\sigma HdW$，也就是$\mathrm{H_t} = \mathrm{H_0 e}^{(g-\frac{\sigma^2}{2}t)+\sigma W}$，其中σ為房價指數報酬率之波動度，$g$是房價指數成長率(在風險中立測度下應該等於無風險利率)，W為Wiener process。因為當

$$\mathrm{H}_t < H_{tL} \Rightarrow H_0 e^{(g-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} < H_{tL} \Rightarrow W_t < \frac{\ln\frac{H_{tL}}{H_0} - (g - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma} = a$$

$$\mathrm{H}_t > H_{t,U} \Rightarrow H_0 e^{(g-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} > H_{t,U} \Rightarrow W_t > \frac{\ln\frac{H_{t,U}}{H_0} - (g - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma} = b$$

因此根據式(7)的參與分享機制，投資者未來所得現金流的期望值可簡化為：

$$\begin{aligned} \mathrm{E(CF)} = & \int_{-\infty}^{a} D_L(H_0 e^{\left(g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W} - H_{t,L})\frac{e^{\frac{-W^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{dW} \\ & + D_C\int_a^b (H_0 e^{\left(g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W} - H_{t,L})\frac{e^{\frac{-W^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dW + D_C\left(H_{t,U} - H_{t,L}\right)\int_b^\infty \frac{e^{-\frac{W^2}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}dW \quad \text{.............} (21) \\ & + D_U\int_b^\infty (H_0 e^{\left(g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W} - H_{t,U})\frac{e^{\frac{-W^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dW \end{aligned}$$

其中$\mathrm{a} = \frac{\ln\frac{\mathrm{H_{t,L}}}{\mathrm{H_0}} - \left(\mathrm{g}-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{t}}{\sigma}$, $b = \frac{\ln\frac{\mathrm{H_{t,H}}}{\mathrm{H_0}} - \left(\mathrm{g}-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{t}}{\sigma}$

上式(21)第一項先提出D_L後的積分值可表示為，

$$\int_{-\infty}^{a}(H_0e^{\left(g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W}-H_{t,L})\frac{e^{\frac{-W^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dW$$

$$=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(H_0e^{\left(g-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W-\frac{W^2}{2t}}\right)dW-H_{t,L}N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$

$$=H_0e^{gt}\int_{-\infty}^{a}\frac{e^{-\frac{(W-\sigma t)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}}dt-H_{t,L}N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$

$$=H_0e^{gt}N(\frac{a-\sigma t}{\sqrt{t}})-H_{t,L}N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$

所以，式(21)中第一項可簡化為$D_L\{H_0e^{gt}N\left(\frac{a-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)-H_{t,L}N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\}$。同理可簡化第2至4項，最後式(20)的期望值可寫成，

$$\begin{aligned}\mathrm{E(CF)}=&D_L\left\{H_0e^{gt}N\left(\frac{a-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)-H_{t,L}N(\frac{a}{\sqrt{t}})\right\}\\&+D_C\left\{H_0e^{gt}\left[N\left(\frac{b-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)-N\left(\frac{a-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)\right]-H_{t,L}\left[N\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)-N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right]\right\}\\&+D_C\left(H_{t,U}-H_{t,L}\right)N(\frac{-b}{\sqrt{t}})\\&+D_U\{H_0e^{gt}\left[1-N\left(\frac{b-\sigma t}{\sqrt{t}}\right)\right]-H_{t,U}\left[1-N\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)\right]\}\qquad Q.E.D.\end{aligned}$$