住宅學報　第二十三卷第一期　中華民國一百零三年六月　學術論著　第35頁—50頁
JOURNAL OF HOUSING STUDIES, VOLUME 23 NO. 1, JUNE 2014

學術論著

逆房貸抵押品的處置時間對保險費率的影響

The Impact of the Disposition Time of Reverse Mortgage Collaterals on Insurance Premiums

楊屯山*　蔡錦堂**　林哲群***
Jerry T. Yang*, Jing-Tang Tsay**, Che-Chun Lin***

摘　要

「不動產逆向抵押型房貸方案」，讓年長者的自有住宅，轉換為提供生活所需現金流之房產權益，發揮居住和融資的雙重功能。本文考慮當事人的平均餘壽、房價波動、折舊率、及市場利率等隨機因素，推導出當事人(借方)的最大可貸額度與銀行(貸方)每月須支付的金額。契約到期時，當貸款餘額大於當時房價，銀行可向保險公司索賠。本文以保險公司的「預期索賠損失的現值」等於「預期抵押貸款保險費之現值」損益兩平為前提，建議(保險公司)保險費率之設定。並針對(銀行)處置抵押品平均所花費的時間，探討處置時間點與保險費率的關聯性，希望藉由保險機制的引入，增加參與此方案的誘因，擴大其實施效能，並為設計與修訂此方案，提供關鍵資訊。

關鍵詞：不動產逆向抵押型房貸、預期索賠損失、預期保險費率、處置(抵押品)時間、保險費率

ABSTRACT

Reverse mortgage plans (RM) allow the elderly (borrowers) to employ their own real estate as both housing and a financing instrument throughout their life span. As the RM expires, the bank (lender) is entitled to lodge a claim on the discrepancy if the loan balance is greater than the house value with the insurance company (IC). Our contribution is threefold. First of all, we use the Taiwan Life Expectancy Database and simulated house prices and interest rates from stochastic processes to estimate the constant annuity and the maximum loan to value. Secondly, we build a simulation model for insurance premium rates, which are charged by the IC to the lender and determined under the condition where the present value of expected claim losses is equal to that of the insurance premiums. Finally, we analyze the impact of the disposition time of RM collateral on insurance premiums based on our simulation results. Our paper can shed light on the implementation and further development of reverse mortgage plans in Taiwan.

Key words: reverse mortgage, expected claim losses, expected insurance premium, disposition time (of collateral), insurance premium rate

(本文於2012年10月2日收稿，2013年11月27日審查通過，實際出版日期2014年6月)

* 國立聯合大學財務金融學系助理教授
Assistant Professor, Department of Finance, National United University, Miaoli, Taiwan.
E-mail: jtyang@nuu.edu.tw

** 國立臺北商業技術學院財務金融系暨研究所助理教授
Assistant Professor, Department and Graduate Institute of Finance, National Taipei College of Business, Taipei, Taiwan.
E-mail: jttsay@webmail.ntcb.edu.tw

*** 國立清華大學計量財務金融學系副教授，聯絡作者
Associate Professor, Department of Quantitative Finance, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan.
E-mail: chclin@mx.nthu.edu.tw

本研究感謝國科會研究計畫經費補助(計畫編號：NSC 100-2410-H-007-054)。本文內容純係作者之觀點，文中若有任何錯誤，當屬作者之責。此外，本研究亦感謝清華大學計量財務金融學系碩士班潘濟民同學在程式及文獻搜集撰寫上的協助。

一、緒論

(一)研究背景與動機

近年來，由於醫療技術的進步等因素，使得人民的平均壽命逐年提高，高齡化社會已成為必然趨勢，全球經濟發展也深受影響。台灣也在此人口結構轉變的衝擊下，面臨許多社會問題的挑戰。其一，如何讓擁有自有住宅卻缺乏親人照顧的年長者頤養天年，成為政府刻不容緩的課題。不動產逆向抵押型房貸方案，也在此時空背景下應孕而生，盼能將自有住宅，轉換為提供年長者生活所需現金流之房產權益，發揮居住和融資的雙重功能。

根據行政院主計處最新的人口普查結果顯示，到2010年底為止，我國65歲以上人口比率占10.7%，較5年前增加一個百分點，全台的老化指數達68.2%(註1)；而在1956年台灣首度人口普查時，老化指數僅5.6%，經過短短半世紀，老化指數上升12倍，台灣不是全球最「老」的國家，卻是全球「老的最快」的國家。行政院政務委員薛承泰指出，台灣大約在2018年會進入高齡社會，長期照護的需求勢必會增加，政府必須爭取這幾年的時間，做好長期照護的準備，因此如何慎選出適合的金融商品，將是一個重要的課題。根據行政院內政部營建署調查顯示，我國的自有住宅率和其他國家相比高出不少，這可能是受到傳統觀念「有土斯有財」所影響，造成部分年長者空有房產，但缺乏生活所需之現金流。因為擁有不動產價值超過三百萬元者，無法取得低收入戶資格，也因此提高了不動產逆向抵押房貸方案，在國內實施的可行性。

不動產逆向抵押房貸的想法，最早起源於英國，但是由美國將其發揚光大。基本概念是在政府政策的支持下，銀行或保險公司協助老年人將流動性差的不動產(房屋)轉換為流動性佳的現金流，藉此解決老人生活需求上的問題。此外，最重要的是，借款者無須搬離其住所直到他壽終正寢或遷移原房屋才算到期。簡言之，就是所謂以房養老的概念。而根據其給付的方式又可將此方案，區分為一次給付型(lump sum)、年金(每月)支付型(annuity)、及信用額度型(line of credit)三種；其中，年金支付型又分為定期型(term)和居住期型(tenure)，差別在於定期型的借方只能在特定期間獲得收益，而居住期的借方只要繼續居住在原房屋內就可以持續獲得收益。另外，還有結合定期型和信用額度型的修正後定期型(modified term)和結合居住期和信用額度型的修正後居住期型(modified tenure)。

此外，不動產逆向抵押房貸方案，最值得注意的特點，就是貸方沒有追索權，即當貸款到期後，貸方會出清借方的抵押品—房子，而出清後所得到的價值扣除貸款餘額後，若還有剩餘的價值，則必須將此多出的價值歸還給借方或借方的繼承人；另一方面，若出清後所得到的價值不足以支付貸款餘額，貸方也無權向借方或其繼承人，追索差額。這差額，通常是由保險公司或政府來彌補，這是為了保障借方的居住權利，或政府照顧年長者的社會福利的一部分，所特別制定的。

張金鶚(2009)提出以房養老的三方案作為發展的基礎：1.不動產逆向抵押房貸(RM)—指由銀行進行評估接受老人以房子抵押貸款，老人可每月固定從銀行獲取生活零用金；2.售後租回年金屋(SL)—設計為老年人將房地產賣給保險公司，再向保險公司承租原來的住宅，由於房屋屬於保險公司，保險公司可負責房子的維修管理，減輕老年人無力修繕的負擔，此外保險公司每月再提供給老年人扣除租金後的現金做為生活費；3.社會照護服務(SC)—以社福機構主體，由社福機構透過貸款或信託方式取得老年人資產，再提供其照護服務。

行政院內政部在2012年試辦「以房養老專案」，是針對有房產、無繼承問題的65歲以上獨居老人，以個案試辦100個名額，由地方政府執行，並以上述所提到的逆向抵押貸款(RM)為主，由政府出資，銀行代辦撥款的方式來實行。基於照顧獨居老人的原則，政府傾向採取公益型逆向抵押年金制；也就是說，指定一家銀行專責辦理，以逆向貸款方式撥付年金，老人餘命若超出原預估，多出費用由政府補貼；如此，也能避免老人在一次領到房貸金額後，馬上被子女等繼承人瓜分財產的情況發生。

(二)研究目的

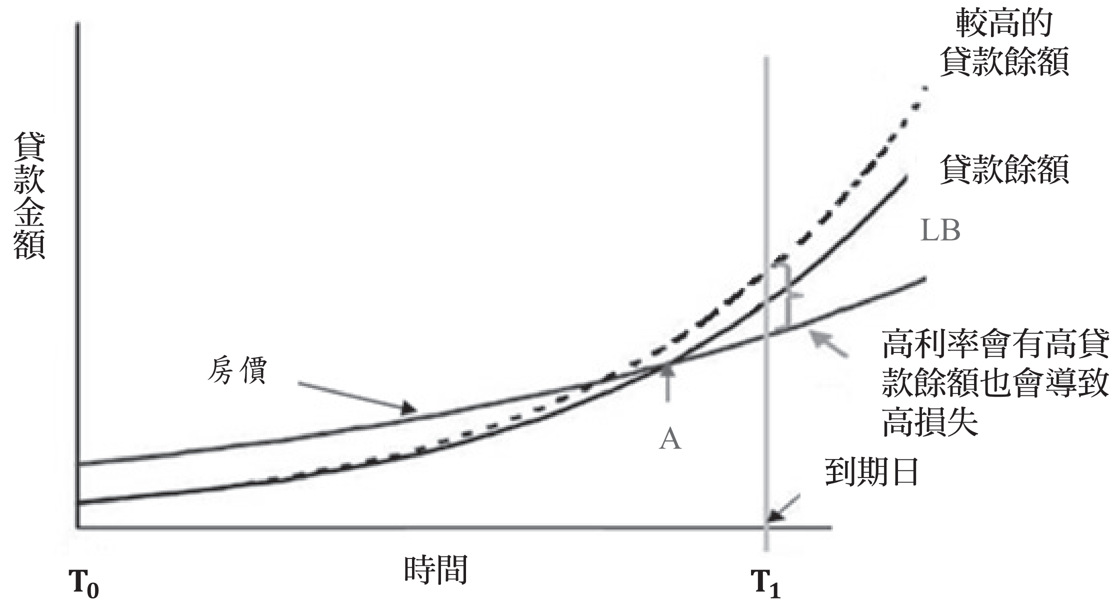
不動產逆向抵押房貸方案的實施，也伴隨著某些風險，而影響較大者有三：房價貶值的風險(house appreciation risk)、利率波動的風險(interest rate risk)以及長壽風險(longevity risk)其中，長壽風險最常被提出來討論，因為相較於普通的貸款，此項風險是不動產逆向抵押房貸所特有的。長壽風險指的是，借方的餘命超出了銀行或保險公司的預估，使得貸款餘額超過房屋的價值而造成的損失。考慮到不動產流動性不佳的特性，所以，除了上述所提的三個主要風險外，本篇文章也將處置抵押品的時間價值因素考慮進去。由於這些風險的存在，如果能將保險機制引入想必能使整個制度更加完善，所以本文將由保險業的角度出發，對不動產逆向抵押房貸的風險做出評估。

本文是以美國HECM(home equity conversion mortgage)方案做為主要的依循，且採用最多人選擇的定期年金支付型方案，接著利用台灣生命表來得知國人的平均預期餘命(註2)，並考慮房價成長率、市場利率等隨機因素，推導出年長者(借方)的最大可貸額度與銀行(貸方)每月須支付的金額。契約到期時，當貸款餘額大於當時房價，銀行發生損失時，可向保險公司索賠。本文以保險公司的「預期索賠損失的現值(PVEL)」等於「預期抵押貸款保險費之現值(PVMIP)」損益兩平為前提，建議保險費率之設定；並針對保險公司處置抵押品所花費時間的長短，探討處置時間點和最適保險費率的可能性與關聯，以期不動產逆向抵押型房貸方案實施效能的擴大，為台灣未來發展此方案，提供關鍵資訊。

二、文獻回顧

(一)承做不動產逆向抵押房貸的風險

Mitchell & Piggott(2004)將承做不動產逆向抵押房貸中的風險歸類為房屋貶值風險、利率風險、長壽風險、費用風險等幾項風險，綜合上述風險，可將貸款餘額、房價和時間的關係以圖一表示。其中，房價和貸款餘額皆隨著時間而增加，但是兩者增加的幅度並不會一致，房價一開始會比貸款餘額高，否則銀行不會想承接貸款，但房價上升的速度比貸款餘額緩，所以在某個時點(A)兩者會達到一個均衡。若這個均衡點(A)剛好就是到期日，那就非常完美了，然而在現實裡，這個均衡點(A)通常會在到期日之前就先達成，導致到期日來臨時貸款餘額會大於房價，而其中的差額就是銀行得承擔的損失。此外，高利率會帶來較高的貸款餘額，進而產生更大損失。最後，到期日通常是根據預期生命表來訂定的，如果借款者的餘命超過到期日，房價和貸款餘額就會往LB的方向移動，就會使得兩者差距越大，導致損失增加。



圖一 貸款餘額、房價和時間關係圖，Mitchell & Piggott(2004)

(二)不動產逆向抵押房貸之訂價模型

U.S. Department of Housing and Urban Development(1990)、Szymanoski(1994)在考慮上述的三大風險下，以美國HECM方案作為基礎，來探討不動產逆向抵押房貸的訂價模型；Chinloy & Megbolugbe(1994)將選擇權—賣權的訂價模型導入不動產逆向抵押房貸的訂價中；U.S. Department of Housing and Urban Development(2000)探討HECM方案獲得的利潤是否足以抵銷其承受的損失部分；U.S. Department of Housing and Urban Development(2003)和Rodda et al.(2004)則是用隨機模型(stochastic model)來預測房價和利率的波動，使得訂價的模型能更精確；Ma & Cho(2004)利用貸款成數(loan-to-value)精算出借款人的可貸額度；Bardhan et al.(2006)假設房貸市場是在風險中立的情況下，用歐式賣權的訂價模型來為房貸的保險做訂價；Ma & Deng(2006、2010)和Ma et al.(2007)研究韓國的不動產逆向抵押房貸，並導入保險的概念，進而制定出不動產逆向抵押房貸的保險費架構。本文主要延伸Ma et al.(2007)的方法和參考Lee et al.(2012)和李秉芳等(2011)之參數設定來探討處置抵押品的時間對調整保險費的影響，進而做出最適當的決策。

三、研究方法

(一)基本假設

假設未來的房價波動(dH)服從幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion Process)加上跳躍擴散過程(jump diffusion process)：

$$dH_t = (\mu_H - \delta_t) H_t dt + \sigma_H H_t dW1_t + dJ_t * N(\theta_j , \sigma_j^2) \quad (1)$$

其中跳躍過程，dJ = 1 with probability of (λdt)

= 0 with probability of (1-λdt)

H_t是在t時點的房價，μ_H是房價的預期成長率，δ_t 是房屋在第t期的折舊率(註3)，σ_H是房價的波動率，$W1_t$是布朗運動的隨機過程。且在t和t + dt有(λdt)的機率房價發生跳躍(jump)，每次發生跳躍的幅度符合平均數為θ_j變異數為σ_j^2的常態分配，根據Lee et al.(2012)方法，定義 $Y(t)=\ln(H(t)/H(t-dt))$ ，$\frac{dQ}{dP}=\xi_T=\prod_{t=dt}^{T}\exp(\varphi \mathrm{Y(t)})/\mathrm{E}_P(\exp(\varphi \mathrm{Y(t)})|F_{t-dt})$ ，將房價之隨機過程由原機率測度P轉成無風險機率測度Q，轉換後之隨機過程符合下列式(2)

$$H_{t+\Delta}=H_t e^{(r_t-\delta_t-\frac{\sigma_H^2}{2})\Delta+\sigma_H(W_Q(t+\Delta)-W_Q(t))+JN(\theta_j,\sigma_j^2)} \qquad (2)$$

其中$\eta_Q=\exp(\theta_j^Q+(\sigma_j^2)/2)-1$; $\theta_j^Q=\theta_j+\varphi\sigma_j^2$; $\lambda_Q=\lambda\exp(\varphi\theta_j+1/2\sigma_j^2\varphi^2)$

J = 1 with probability of ($\lambda_Q\Delta$)

= 0 with probability of (1 - $\lambda_Q\Delta$)

W_Q在新的機率測度Q下是布朗運動，r_t是t點的無風險報酬率，

假設市場利率在原來機率測度的隨機過程如下

$$dr_t=\alpha(\mu_r-r_t+\frac{\kappa_r}{\alpha}r_t)dt+\sigma_r\sqrt{r_t}d\mathrm{W}_t \qquad (3)$$

其中α是回復平均的速度，μ_r是市場利率的預期長期水準，σ_r是市場利率的波動率，$W2_t$是布朗運動的隨機過程，$K_r r_t$ 是單位時間內承擔利率波動風險所需的風險貼水；按CAPM模型，風險貼水的數值應等於利率的β值乘上股票市場溢價(通常利率對市場投資組合的β值影響很低，使得風險貼水幾乎可忽略，則利率過程近乎CIR模型)。根據Girsanov理論存在 $dW2_t=dW_t+\frac{\kappa_r\sqrt{r_t}}{\sigma_r}dt$ 在風險中立機率測度Q下它是符合Wiener過程，也就是在風險中立機率測度Q下，利率符合CIR模型 $dr_t=\alpha(\mu_r-r_{tt})dt+\sigma_r\sqrt{r_t}d\mathrm{W}2_t$ ，此時t時點的市場利率差可以寫成：

$$\Delta r_t=\alpha(\mu_r-r_t)\Delta t+\sigma_r\varepsilon_t\sqrt{r_t\Delta t} \qquad (4)$$

其中$\Delta r_t=\mathrm{r}_{t+1}-r_t$，$\varepsilon_t$是標準常態分配N(0，1)的隨機變數。最後將房價和利率的相關係數(ρ)考慮進去的話，可以得到：

$$E(dW_{Qt}dW2_t)=\rho dt \qquad (5)$$

(二)決定不動產逆向抵押房貸的可貸額度和每月支付的金額

根據Ma & Cho(2004)，考慮利率的隨機性，借款人的最大貸款額度：

$$LSUM=\frac{H_0\cdot\Pi_{t=1}^{T(a)}(1+g_t)}{\Pi_{t=1}^{T(a)}(1+E(r_t)\,\Delta)}=H_0\cdot LTV \qquad (6)$$

其中$LSUM$是銀行給借款人的最大貸款額度，T(a)是借方平均預期餘命的總月數，g_t是在t時點的預期房價月成長率，在本模型中為((r_t - δ_t) Δ)的期望值，Δ = 1/12，LTV是貸款成數。根據式(6)的最大貸款額度，可計算出每月支付的金額(PMT)。首先，計算：

$$LSUM - UP_0 = \sum_{t=0}^{R(a)-1} \frac{PMT \cdot p_{a,t}}{\left[\prod_{s=1}^{t}\left(1+r_s\,\Delta\right)\right] \cdot \left[1+\left(\frac{m}{12}\right)\right]^t} \quad (7)$$

其中UP_0是銀行在t=0時預付的保險費，根據HECM方案將UP_0設為$0.02H_0$，$R(a)$是a歲的借方活到100歲的總月數(註4)，PMT是銀行每月付給借方的金額，$p_{a,t}$是借方在a歲時借款並存活到$a+t$歲的機率，m是銀行付給保險公司的保險費率。再根據式(7)就能求出每月支付金額為：

$$PMT = \frac{LSUM - UP_0}{\sum_{t=0}^{R(a)-1} \frac{p_{a,t}}{\left[\prod_{s=1}^{t}\left(1+r_s\,\Delta\right)\right] \cdot \left[1+\left(\frac{m}{12}\right)\right]^t}} \quad (8)$$

(三)不動產逆向抵押房貸之保險架構

首先考慮保險公司獲利的部分，也就是銀行付給保險公司的保險費現值：

$$PVMIP = UP_0 + \sum_{t=1}^{R(a)} \left[\frac{mip_t \cdot p_{a,t}}{\prod_{s=1}^{t}\left(1+r_s\,\Delta\right)}\right] \quad (9)$$

其中$PVMIP$是預期收到的保險費現值，mip_t是預計每月銀行支付的保險費。根據不動產逆向抵押房貸的保險契約規定，當到期日時的貸款餘額大於到期日時的房價，銀行就會有損失發生，可以向保險公司索賠，保險公司就得承接此損失，所以到期日時保險公司的損失為：

$$Loss_t = \max\ [(OLB_t - H_t),0] \quad (10)$$

其中$Loss_t$是在t時點的損失，OLB_t是在t時點的貸款餘額。可以將OLB_t表示成：

$$OLB_t = [(OLB_{t-1} + PMT + mip_t)\ ]\ \ (1+r_t\ )$$

$$= [(OLB_{t-1} + PMT) \cdot (1+(m/12))]\ \ (1+r_t\,\Delta) \quad (11)$$

其中OLB_t是在t時點的貸款餘額，且$OLB_0 = (UP_0+PMT) \cdot (1+(m/12))$，再根據式(10)做折現，可以得到預期損失的現值：

$$PVLoss_t \equiv Put_t = \frac{E[Loss_t]}{\prod_{s=1}^{t}\left(1+r_s\,\Delta\right)} = \frac{E\{\max[(OLB_t - H_t),0]\}}{\prod_{s=1}^{t}\left(1+r_s\,\Delta\right)} \quad (12)$$

其中$PVLoss_t$是預期損失的現值。然後考慮條件機率的部分：先設在a歲借款的借款者會在t時點死亡或是提前清償的機率為$pr_{a,t}$；在t時點貸款到期且清償的機率為q_t，U.S. Department of Housing and Urban Development(2000)指出貸款到期且清償的機率q_t通常是死亡率的1.3倍(註5)。根據上述的定義，可以預期借款者在第一個月會死亡或提前清償之機率是$pr_{a,1} = (p_{a,0} - p_{a,1}) \cdot q_1$，而在第二個月會死亡或提前清償之機率則是

$pr_{a,2} = \dfrac{(1 - pr_{a,1})}{p_{a,2}}(p_{a,1} - p_{a,2}) \cdot q_2$，所以推導後就得到：

$$pr_{a,t} = \frac{(1 - \sum_{s=1}^{t-1} pr_{a,s})}{p_{a,t}} \cdot (p_{a,t-1} - p_{a,t}) \cdot q_t \quad (13)$$

再將式(12)搭配上式(13)不動產逆向抵押房貸順利在到期日(t)到期的條件，就可以得到保險公司預期被索賠的損失現值為：

$$PVEL = \sum_{t=1}^{R(a)} \frac{(1-\sum_{s=1}^{t-1} pr_{a,s})}{p_{a,t}} \cdot (p_{a,t-1} - p_{a,t}) \cdot q_t \cdot PVLoss_t$$

$$= \sum_{t=1}^{R(a)} pr_{a,t} \cdot PVLoss_t = \sum_{t=1}^{R(a)} pr_{a,t} \cdot Put_t \quad (14)$$

其中$PVEL$是保險公司預期被索賠的損失現值。上述的預期損失是在抵押品能夠在到期日馬上處置掉的前提下才成立的，不過實際的情況往往不是如此，由於不動產具有流動性不佳的特性，所以必須再將保險公司處置抵押品所花費的時間考慮進去。根據保險契約的規定，一旦銀行有損失發生，銀行就必須將整個貸款移交給保險公司處理，因此保險公司若沒有馬上處置掉抵押品，就會有機會成本的損失。在此先假設貸款到期後保險公司預計會花費π的時間來處置掉抵押品，所以可以得到保險公司的損失為：

$$Loss_{t+\pi} = \max\left[(OLB_t \cdot (\prod_{s=1}^{\pi}(1 + r_{t+s}\,\Delta)) - H_{t+\pi}),0\right] \quad (15)$$

所以根據式(15)可以得到在考慮抵押品處置所花費的時間的情形下，保險公司被索賠的損失現值：

$$PVLoss_t^* \equiv Put_t^* = \frac{E_Q\,[Loss_{t+\pi}]}{\prod_{s=1}^{t+\pi}(1+r_s\,\Delta)} \quad (16)$$

$$PVEL^* = \sum_{t=1}^{R(a)} \frac{(1-\sum_{s=1}^{t-1} pr_{a,s})}{p_{a,t}} \cdot (p_{a,t-1} - p_{a,t}) \cdot q_t \cdot PVLoss_t^*$$

$$= \sum_{t=1}^{R(a)} pr_{a,t} \cdot PVLoss_t^* = \sum_{t=1}^{R(a)} pr_{a,t} \cdot Put_t^* \quad (17)$$

然後根據式(9)和式(17)，保險公司在收支平衡的情況下，兩式會相等，所以得到下列恆等式：

$$PVMIP = UP_0 + \sum_{t=1}^{R(a)}\left[\frac{mip_t \cdot p_{a,t}}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s\,\Delta)}\right] = UP_0 + \sum_{t=1}^{R(a)}\left[\frac{(OLB_{t-1}+PMT)\cdot(\frac{m}{12})\cdot p_{a,t}}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s\,\Delta)}\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{R(a)} \frac{E\{max[(OLB_t \cdot (\prod_{s=1}^{\pi}(1+r_{t+s})) - H_{t+\pi}),0] \cdot pr_{a,t}\}}{\prod_{s=1}^{t+\pi}(1+r_s\,\Delta)} = PVEL^* \quad (18)$$

最後根據式(18)可得知，保險公司處置抵押品的時間越長，所花費的成本就會越高，但是可以自由選擇處置抵押品的時點，換句話說，保險公司能獲得一個讓未來房價上漲的機會。

四、研究結果與分析

(一)參數設定

本文參照Lee et al.(2012)和李秉芳等(2011)兩篇文獻，設定模擬未來房價和市場利率波動的參數。假設未來房價服從幾何布朗運動，因此其中所需設定的參數為期初房價(H_0)=600萬元，房價長期水準(μ_H)=0.03，房價的波動率(σ_H)=0.05，總期數(t)=420個月，風險調整參數φ = 2.028，發生jump的平均數(θ_j)=-0.0045，發生jump的標準差(σ_j)=0.0344，平均發生jump次數(λ)=8.2223，折舊率(δ_t)參照新北市加強磚照或鋼鐵結構房屋設定為0.012；而未來市場利

率是服從Cox-Ingersoll-Ross Process，因此其中所需設定的參數為期初利率(r_0): 0.03，回復平均的速度(α): 0.25，利率長期水準(μ_r): 0.045，利率的波動率(σ_r): 0.1，總期數(t): 420個月，然後將房價和利率的相關係數(ρ)設為-0.3(註6)。最後根據以上的參數設定各自模擬10,000次。

(二)模擬結果

在模擬出房價和市場利率後，就可以根據2010年台灣生命表裡不同年齡的平均預期餘命和式(6)，來計算出不同年齡借款者的貸款成數(LTV)和借款者的最大可貸額度(LSUM)，詳見表一。

表一 不同年齡借款者之LTV和LSUM 單位：萬元

年齡	平均餘命(月)	LTV	LSUM
65	230	0.4897	293.82
70	186	0.5643	338.58
75	146	0.6387	383.22
80	112	0.7131	427.86
85	84	0.7778	466.68

根據表一的數據，可以觀察到隨著借款者的年齡增加，貸款成數(LTV)也會隨著增加，這是由於借款者的平均預期餘命逐漸縮短所造成，而最大可貸額度(LSUM)也因此增加。在求得LSUM後，根據式(8)可以再計算出銀行每月支付給借款人的金額，最後根據式(18)，在保險公司預計分別花費一個月(π=1)、三個月(π=3)、半年(π=6)、一年(π=12)、兩年(π=24)來處置抵押品的情況下，求出保險費率(m)，使得保險公司預期收到的保險費現值(PVMIP)會和預期被索賠的損失現值(PVEL)相等，結果詳見表二。

表二 不同年齡借款者之PMT、PVMIP、PVEL和m 單位：萬元

	處置抵押品預計所花費的總月數(π)	PMT	PVMIP	PVEL	m
65	π=1	2.476	247.825	247.825	3.35%
	π=3	2.4759	247.742	247.742	3.35%
	π=6	2.4754	247.462	247.462	3.34%
	π=12	2.4736	246.373	246.373	3.34%
	π=24	2.4668	242.264	242.264	3.30%
70	π=1	2.9538	117.673	117.673	2.16%
	π=3	2.9533	117.529	117.529	2.10%
	π=6	2.9521	117.152	117.152	2.10%
	π=12	2.9484	115.963	115.963	2.08%
	π=24	2.9344	111.582	111.582	2.01%

以表二為例，由於表一中的LSUM隨著借款者年齡增長而增加，使得每月支付金額(PMT)也是呈現出同樣的情況。借款者年齡的增加也代表著距離到期日的期限逐漸縮短，保險公司所需面對的風險也會因此較低，所以保險費率(m)會隨著借款者的年齡增長而降低，這也導致保險費現值(PVMIP)和預期被索賠的損失現值(PVEL)一樣會隨著借款者年齡的增長而降低。

觀察表二可知：若保險公司處置抵押品所花費的時間越長，設定的保險費會越低。這是因為可以將本文中的預期被索賠的損失現值(PVEL)看成是一種歐式賣權(註7)；在其他條件相同下，到期日越長的賣權有可能比到期日短的賣權便宜，尤其是標的物價格很低時，最極端例子是房價跌到零時將來房價不可能比現在更低當然要提早執行，晚執行的賣權價值會比較低。另外，當處置時間加長時，等同壽險公司給房貸戶一個到期日更長的歐市賣權；在考慮折舊下，延後處置資產會讓壽險公司預期損失擴大，理論上壽險公司應提高保費。

但根據式(8)，PMT是m的正向函數，保費提高，銀行可以提高給房貸戶每個月的年金給付，此一給付增加會更擴大房貸戶的未償付餘額，讓保險公司承受更大的損失，對保險公司不一定好。如果多收保費的收入，無法彌補未償付餘額擴大的損失，提高保費反而不利。此時反而應該要求銀行降低年金給付，同時少收保費，因為降低年金給付，透過年金複利的作用，可以大幅降低未償付餘額，使保險公司的預期損失減少幅度大於保費短收的幅度，使壽險公司獲利增加，因此造成處置時間延長，保費反而降低的現象。

表三 不同年齡借款者之最適保險費率(m)值

年齡	65	70
m平均值	3.3348%	2.0811%

從表二到表三，由於75歲以上借款者的保險費率(m)值皆無法使保險費現值(PVMIP)和預期被索賠的損失現值(PVEL)達成平衡，因此本文只呈現借款者於65歲和70歲借款的結果。這代表剛開始收的預收保費120,000已足夠支付未來的預期損失，因為本文房價的標準差0.05設的也算大，選擇權的價值本來就不大，而平均到期日及到期日的波動性都比65歲的案例小很多，因此2%的權利金已算多了。

面對這個問題，如果保險費率(m)=0代入計算出來的預期被索賠的損失現值(PVEL)<120,000，代表在這組參數下，UP_0=0.02H_0太大了，建議HECM應針對更高齡族群在房價波動度低的情況下降低UP_0。例如:假設借款者75歲以上，且在σ_H=0.05，m=0的情況下算出來的預期被索賠損失的現值(PVEL)=108,000，代表合理的UP_0/H_0 應小於0.018。或許將σ_H的值加大到一定程度，75歲以上的保險費率(m)值就有機會求出來。另外t時點貸款到期且清償的機率(qt) 也是影響有無解的因素，當qt越大提前清償越快，put(前述提到的歐式賣權)有價值的機率越低，亦有可能造成預期被索賠的損失現值(PVEL)<120,000，因此HECM實在有必要針對不同年齡不同σ_H和qt之預測制定不同預付保險費率。

(三)比較靜態分析

在得到上述的結果後，就可以來觀察幾項重要參數的變動對保險費的影響，本文主要是以房價的(名目)波動率(σ_H)及房價和利率的相關係數(ρ)來做為變動的重要參數。首先，讓σ_H由原本的設定值(5%)分別向上增加和向下減少1%到3%，即可得到表四—保險費費率隨房價

(名目)波動率變動的結果。

表四 房價(名目)波動率(σ_H)對不同年齡借款者之保險費率(m)值的影響

m值		σ_H						
		2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
年齡	65	2.8950%	3.0942%	3.2359%	3.3348%	3.4010%	3.4430%	3.4669%
	70		1.1577%	1.7948%	2.0811%	2.2528%	2.3582%	2.4186%

根據表四，房價的波動度越大，保險公司訂定的保險費費率會越高，這是由於可以將預期損失看成是一種歐式賣權，而歐式賣權在其他條件相同下，波動度越大的賣權會變得更有價值，所以保險費就會隨著房價的波動度上升而提高。

接著是要觀察房價和利率的相關係數(ρ)對保險費率(m)的影響。本文這裡只著重於房價和利率的正相關性和負相關性兩種情況，因此可將房價和利率原本的相關係數(ρ)改成正值，就可以得到表五也就是在正負相關兩種情況下保險費率的變動結果。

表五 房價和利率的相關係數(ρ)對不同年齡借款者之保險費率(m)值的影響

m值		π=1		π=3		π=6	
		ρ = -0.3	ρ = 0.3	ρ = 0.3	ρ = -0.3	ρ = 0.3	ρ = -0.3
年齡	65	3.3481%	3.3437%	3.3406%	3.3473%	3.3345%	3.3449%
	70	2.1069%	2.0705%	2.0613%	2.1048%	2.0447%	2.0991%
m值		π=12		π=24		AVG	
		ρ = -0.3	ρ = 0.3	ρ = 0.3	ρ = -0.3	ρ = 0.3	ρ = -0.3
年齡	65	3.3352%	3.3178%	3.2663%	3.2985%	3.3206%	3.3348%
	70	2.0810%	2.0033%	1.8867%	2.0138%	2.0133%	2.0811%

表五顯示，當房價與利率呈負相關時，保險費率(m)較其呈正相關時還大。根據式(12)，保險公司預期被索賠的損失現值(PVEL)可以改寫成：

$$PVLoss_t = \frac{E_Q\{\max[(OLB_t - H_t),0]\}}{\Pi_{s=1}^{t}\left(1+r_s\Delta\right)}$$

$$= \frac{E_Q\{\max[(OLB_{t-1}+PMT)\left(1+\frac{m}{12}\right)-\frac{H_t}{1+r_t\Delta},0]\}}{\Pi_{s=1}^{t-1}\left(1+r_s\Delta\right)} \quad \text{..} (19)$$

通常，房價下跌時，前述提到的歐式賣權(put)價值增加；而(房價與利率呈)負相關表示：(1)當房價下跌伴隨利率增高時，式(19)中，分子部分的減項，$\frac{H_t}{1+r_t\Delta}$，較正相關時低，以致「預期損失現值」增加幅度，較正相關時大的可能性增加；(2)當房價升高伴隨利率降低時，此時put處於價外狀態(out of the money)的機率增加，以致對賣權的價值影響程度減少，相較於(當房價與利率呈)正相關時—房價升高伴隨利率增加，保險公司的「預期損失現值」，因較低

的折現率，而增加幅度較大的可能性，也隨之增加。所以，當房價與利率呈負相關時，保險費率(*m*)較其呈正相關時還大。

理論上，折舊率提高會使給房貸戶的賣權價值變大，從而提高保費。但當考慮到折舊時，由式(6)及表六可看出：折舊率(δ)提高，反而使承作貸款業務的銀行所給付之保險費率(m)降低。此一有趣的模擬結果，與銀行「自我保護」的貸款政策若合符節。亦即，銀行對於老舊或折舊率高的房子，願意借給房貸戶的貸款成數(LTV)會變小，因而(房貸戶)每月支付金額(PMT)也隨之變小；則本文視為賣權(put)的「預期索賠損失的現值」，因(賣權)被執行的機率減少，而其價值減少的可能性增加，導致保險公司願意降低保險費率；或從保戶的角度來看，願意為「預期索賠損失的現值」付出的「保留價格(Reservation Price)」，即保險費率，降低的可能性亦隨之增加。當費率調低時，按照式(9)，PMT又再跟著調低，造成賣權的價值更進一步減少，如此反覆直到PMT降至剛好彌補因保險費率的下降所造成的收入減少才停止。

表六 房價折舊率(δ_t)，Jump標準差(σ_j)，Jump平均次數(λ)，跳躍幅度的平均數(θ_j)
對借款者之保險費率(m)的影響

	*m*值	65歲
δ_t	0.01	3.6983%
	0.011	3.5187%
	0.012	3.3348%
	0.013	3.1461%
	0.014	2.9518%
σ_j	0.0304	2.1159%
	0.0324	2.7795%
	0.0344	3.3348%
	0.0364	3.8200%
	0.0384	4.2517%
λ	6.2223	2.7073%
	7.2223	3.0077%
	8.2223	3.3348%
	9.2223	3.5989%
	10.2223	3.8533%
θ_j	-0.0055	4.6895%
	-0.005	4.0379%
	-0.0045	3.3348%
	-0.004	2.5504%
	-0.0035	1.5806%

由表六可看出，σ_j的變動對保險費率(*m*)的正向影響，與σ_H一樣。因為令房屋報酬率的總波動度為σ_G，則$\sigma^2_{GT} = \sigma^2_H T + E(J\sigma^2_j)$，當$\sigma_j$越大，造成標的物報酬率的標準差($\sigma_G$)變大，給房

貸戶選擇權的價值越大，以致保險公司承受較大損失，故保費會調高。

由表六知，當λ變大，jump次數變多，相對地標的物報酬率的標準差變大，故λ的變動與σ_j一樣，給房貸戶選擇權價值越大，保險公司承受較大損失，故保費調高。此外，本文為探討保險費率對外生參數的敏感度，特別計算保險費率對個別外生參數的彈性。本研究採用彈性的近似公式，假設最適費率m是$x_1, x_2,...x_k$的函數，$m = f(x_1,x_2,...,x_k)$，則m對第i個外生變數彈性ε_{x_i}公式如下

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{x_i}{f}$$
$$= \frac{f(x_1, x_2,..., x_i+\Delta,...x_K) - f(x_1, x_2,..., x_i-\Delta,...x_K)}{2\Delta}\frac{x_i}{f(x_1, x_2,..., x_i,...x_K)} \quad (20)$$

例如，從表七可計算出保險費率(m)對房價折舊率(δ_t)的敏感度：

$$\varepsilon_{\delta} = \frac{3.1461\%-3.5187\%}{(0.013-0.011)}\frac{0.012}{3.3348\%} = -0.6704 \quad (21)$$

保險費率對各外生參數的彈性值列於下表七：

表七 最適保險費率(m)對各外生參數之彈性值

彈性值	65歲				
	σ_h	σ_j	δ_t	λ	θ_j
m	0.1238	2.6833	-0.6704	0.7288	2.0072

從表七可知，每次發生跳躍的幅度期望值(θ_j)與標準差(σ_j)對保險費率(m)的影響較大，其彈性值分別為2.01%與2.68%。即當σ_j變動1%時，保險費率要調升2.68%。可能因為當房價跳躍因素發生時，保險公司預期其對房價的影響(幅度)增加，以致，等同授給房貸戶的賣權價值增加最多，因而，調升保險費率的比率最高。而調高保費時，隱含銀行可以借更多年金給房貸戶，如此更擴大賣權的價值，繼而又需調高保費。如此反覆，直到保費增加的邊際效益，足以彌補年金增加所造成的預期損失為止，造成其對保險費率影響程度最大。

五、結論

本文首先參考過去的資訊來設定適當的參數，接著模擬出未來的房價和利率，然後使用台灣生命表來估計不同年齡借款者的到期日，並計算出銀行每月付給借款者的金額。在獲得上述資訊後，就可以分別得到到期日後一個月、三個月、半年、一年、兩年後處置抵押品的預期損失現值，然後根據式(18)就可以計算出在收支平衡情況下的保險費率。

站在保險公司的立場，保險公司就可以經由以上所獲得的資訊來訂定行銷策略。由於保險公司通常承做不動產逆向抵押型房貸的案例夠多，在處置各個案例的抵押品所花費的時間有長也有短，因此依照表七將不同處置抵押品所費時間的保險費率取平均，理論上就能得到保險公司的均衡保險費率。不過若想要得到更精確的結果，可以將保險公司處置抵押品所花時間的歷史記錄也考慮進去，經由歷史資料所給的訊息來設定不同的權重，例如:歷史資料顯示，保險公司通常在貸款到期後的半年和一年處置掉抵押品，所以就可以將半年和一年的權

重設得比較高，而其他三個抵押品處置時點的權重就可以設得較低一些，根據這樣的作法，最後就可以順利得到均衡保險費率。

此外，值得探討的一點是，本文採用的公式都是以公益的角度做為前提所訂定的，假使純就商業面來看，由於保險公司的合約裡並沒有明文規定，因此保險公司並無義務對借款者負無追索權的責任，在這樣的前提下，就可以將式(15)裡的max拿掉，那保險公司是否就能靠著延長抵押品的處置時間來獲利呢，也就是$H_{t+\pi} > OLB_t(1 + r_{t+\pi})$的情況。在模擬的過程裡發現，依照本文設定的參數，若將max的限制去除，保險公司的確能夠獲利，且獲利的幅度大到得將保險費設成負值才能使損益達成平衡，因此保險公司也許可以運用此獲利的部分來和借款者達成互惠的結果，初步想法是保險公司可以和借款者共享此獲利的部分，而藉由共享，保險公司可以將保險費制定得比較低，讓借款者的負擔降低，這樣不只能讓保險公司本身獲利還能兼顧公益方面的需求，進而創造出雙贏的局面。

本研究探討(抵押品)處置時間點和保險費率的關聯性，建議保險費率之設定時，考慮實務應用價值，使用保險業者慣用life table處理「長壽風險」部分一即將存活壽命分配，用life table模型，加上房價波動、折舊率、及市場利率等隨機過程。針對「剩餘壽命」分配，我們也曾嘗試其他可能：例如，指數分配是很多學者經常引用；但指數分配memoryless property 有些不切實際。至於一般常用的常態分配或對數常態分配，與實務相去甚遠。life table 模型雖有其缺點，但執行簡便及廣為保險業者使用因素，尚於估算餘壽時，納入區域性因子等優點，成為本文應對「長壽風險」的選擇。

目前保險業者運用各種精算及計量技巧，時常更新life table，以期捕捉未來生活環境改變或醫療科技進步，造成平均壽命增減的可能，這修正過程已超出本文研究範圍。本文假設life table已知情況(即假設我們從專業人員手中拿到修正後、最新版的life table)，進行最適保費計算，進而探討(抵押品)處置時間對保費及貸款成數之影響。上述理由雖合理化life table的使用，但，未來研究考慮加入「隨機長壽風險過程」來捕捉「長壽風險」的「隨機性」，則「收集估算餘壽有關資訊」與「刻畫(模擬)參數(parameter calibration)」，進而估計公平費率，將是有趣具挑戰性的課題。

根據上述的模擬可得知，能否獲利或是獲利的多寡主要都是由未來房價的走勢來決定，這就牽涉到對於未來房價的評估，不過由於本文是以模擬的房價和利率做為主要的參考，因此在後續研究的部分可以加入更多實證的相關數據使得本研究更加完善。

註 釋

註1：「老化指數」是指，老年人口(65歲以上)占幼年人口(未滿15歲)的比率，用來衡量一國老化的程度。

註2：從內政部統計處2010年台灣生命表內擷取國民平均餘命資料。

註3：感謝匿名評審建議：將房價折舊率(δ)加入房價的隨機過程中

註4：本文採用美國住宅與都市發展局對不動產逆向抵押型房貸的相關研究設定，將人類的最長壽命假設為100歲。

註5：根據美國不動產逆向抵押型房貸市場的相關規定，借款人喪失期限利益條件有:借款人死亡、借款人永久搬離或超過12個月未居住於抵押物、將房屋轉售或移轉房屋產權給予他人、將房屋部分或全部租給他人或出借他人、將房屋用途由住家改為商用、將房屋再抵押借款幾點，因此我們採用U.S. Department of Housing and Urban Development(2000)的內容，假設貸款到期且清償的機率是死亡率的1.3倍。

註6：本文的參數設定是參照李秉芳等(2011)。

註7：匿名評審建議：「若考慮房子折舊的風險，則索賠的損失現值可視為一種美式賣權，找出逆房貸抵押品的最佳處置時間。」本文所謂抵押品之「處置時間」是指：從房貸戶身故，到房子可以被拍賣所需要的時間。在這段時間內，可能因為法律文件未完備，或是房子還需進一步整理，才能達到可拍賣狀態等市場因素，銀行亦無法完全掌控或單方面決定何時能將房屋賣出，遑論保險公司，其既無權也無須訂出「最佳」處置時間。但是，為精算保險費率之需，(保險公司)依據個案之主客觀條件，估計「平均」處置時間，確有必要。這也是本文主要研究動機之一。因此，現行實務考量下，本文在建構模型時，仍沿用「歐式賣權」來描述此保險契約的「選擇權性質」—相當於保險公司賣出一個歐式賣權給銀行。未來，如果保險公司取得處分抵押品的權限，並在有關會議上取得主導權，則將其視為「美式賣權」—如評審建議，更為適當；亦即，在「實質選擇權(real options)」的研究領域中，所謂的美式「遞延或時機選擇權(delay or timing options)」，是未來很好的研究議題。

參考文獻

中文部分：

李秉芳、楊屯山、林哲群

2011〈固定利率與指數型不動產逆向抵押貸款之比較分析〉《住宅學報》20(2)： 27-46。

Li, P. F., J. T. Yang & C. C. Lin

2011 "A Comparison between Fixed-rate and Adjustable-rate Reverse Mortgages," *Journal of Housing Studies*. 20(2): 27-46.

張金鶚

2009《台灣以房養老三方案模式提議》，以房養老逆向抵押貸款方案研討會。

Chang , C. O.

2009 "*Three Proposal of Reverse Mortgage in Taiwan*," Reverse Mortgage Workshop.

英文部分：

Bardhan, A., R. Karapandža & B. Urošević

2006 "Valuing Mortgage Insurance Contracts in Emerging Market Economics," *Journal of Real Estate Finance and Economics*. 32(1): 9-20.

Chinloy, P. & I. F. Megbolugbe

1994 "Reverse Mortgages: Contracting and Crossover Risk," *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*. 22(2): 367-386.

Lee, Y. T., C. W. Wang & H. C. Huang

2012 "On the Valuation of Reverse Mortgages with Regular Tenure Payments," *Insurance: Mathematics and Economics*. 51(2): 430-441.

Ma, S. R. & D. H. Cho

2004 "*Payment Plans of Reverse Mortgage System in the Korean Housing Market*," the 1st International Solar Cities Congress.

Ma, S. R. & Y. H. Deng

2006 "Insurance Premium Structure of Reverse Mortgage Loans in Korea," *Working Papers* 2006-1010, Lusk Center for Real Estate, University of Southern California.

Ma, S. R. & Y. H. Deng

2010 "Evaluation of Reverse Mortgage Programs in Korea," *IRES Working Papers* 2011-027, National University of Singapore.

Ma, S. R., G. Kim & K. Lew

2007 "*Estimating Reverse Mortgage Insurer's Risk Using Stochastic Models*," Conference of Asia-Pacific Risk and Insurance Association.

Mitchell, O. S. & J. Piggott

2004 "Unlocking Housing Equity in Japan," *Journal of the Japanese and International Economies*. 18(4): 466-505.

Rodda, D. T., K. Lam & A. Youn

2004 “Stochastic Modeling of Federal Housing Administration Home Equity Conversion Mortgages with Low-cost Refinancing,” *Real Estate Economics*. 32(4): 589-617.

Szymanoski, E. J.

1994 “Risk and the Home Equity Conversion Mortgage,” *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*. 22(2): 347-366.

U.S. Department of Housing and Urban Development

1990 A Model to Calculate Borrower Paymentsand Insurance Risk.

U.S. Department of Housing and Urban Development

2000 Evaluation Report of FHA’s Home Equity Conversion Mortgage Insurance Demonstration.

U.S. Department of Housing and Urban Development

2003 Refinancing Premium, National Loan Limit, and Long-term Care Premium Waiver for FHA’s HECM Program.