

學術論著

投資不動產之行為探討—以財務槓桿程度分析

An Analysis of the Behavior of Investment in Real Estate- To the Degree of Financial Leverage

洪志興* 陳勤明**

Chih-Hsing Hung*, Chin-Ming Chen**

摘 要

本研究主要是在探討投資人槓桿租金純益率，如何受到毛租金收益與投資人財務槓桿結構的影響，並且進一步探討投資人的行為。根據模型可以得知，雖然增加毛租金收益會使投資人槓桿租金純益率上升，但是投資人透過調整財務槓桿程度，也會影響投資人租金純益率，所以調整財務槓桿程度與毛租金收益皆會影響槓桿租金純益率。從數值可以發現，在借貸利率比較低的市場，投資人透過調整財務槓桿比率，會使槓桿租金純益率上升，所以投資人可以忍受較低的毛租金收益或較高的不動產價格；但是在借貸利率較高時，投資人會要求較高的毛租金收益或較低的不動產價格。根據本研究模型，在不一樣的毛租金收益變動，則可以提供如何調整財務槓桿比率，進一步提高其槓桿租金純益率。或是在不一樣的財務槓桿比率變動，可以提供如何調整毛租金收益，進一步提高其槓桿租金純益率。

關鍵詞：財務槓桿、租金收益、投資行為、不動產價格

ABSTRACT

The paper tries to explore the degree to which the realized rate of return from rentals is affected by the gross rental income and financial leverage of investors. The paper finds that the realized rate of return from rentals will not just increase due to higher gross rental income, but will be affected by the level of the financial leverage of investors. The model presented in the paper can explain why the investors are willing to accept lower rental income or higher property prices. The paper further shows that when the mortgage rate is high, investors tend to demand higher gross rental income or lower property prices. In addition, under different levels of gross rental income and financial leverage, investors can increase their expected leveraged rate of return from rentals.

Key words: financial leverage, rental income, investment behaviors, property prices

(本文於2013年2月5日收稿，2013年12月23日審查通過，實際出版日期2014年12月)

* 國立高雄第一科技大學金融系副教授，聯絡作者

Associate Professor, Department of Money and Banking, National Kaohsiung First University of Science and Technology, Kaohsiung, Taiwan. E-mail: hunpeter65@nkfust.edu.tw

** 國立高雄第一科技大學金融系副教授

Associate Professor, Department of Money and Banking, National Kaohsiung First University of Science and Technology, Kaohsiung, Taiwan. E-mail: chinming@nkfust.edu.tw

本研究感謝國科會研究計畫經費補助(計畫編號：NSC 102-2410-H-327-037)

一、緒論

由於2008年的全球金融風暴，所以現在全世界都採取寬鬆貨幣政策，導致現在金融市場的借貸利率非常低，由於資金的寬鬆，所以造成市場較大的通貨膨脹，並且進一步推升不動產的價格。由於不動產的價格不斐，並且也具備抵押品的特性，所以許多投資人都會利用財務槓桿來投資不動產，由於透過財務槓桿來購買不動產的方式，並非全部使用自有資金，所以使用財務槓桿程度是會影響投資人真實的報酬率，由於資金寬鬆與利率較低，導致不動產的投資人，都可以輕易使用較高的財務槓桿來投資不動產。因此本研究要探討財務槓桿程度如何影響投資人報酬率。

Higgins(2007)認為不動產已經是共同基金的重要標的物，占英國共同基金的總金額約10%，占美國共同基金的總金額約5%，所以不動產已經成為投資組合的標的之一，因此，對於不動產的投資報酬率分析是一個重要的研究議題。

Tyrrell & Bostwick(2005)認為財務槓桿是不動產投資重要的工具，因為投資人在購買不動產時，他們大部分會透過財務槓桿來投資不動產。由於透過財務槓桿的投資，則會提高投資人的隱含報酬率，但也會增加投資人的風險。他們認為投資人會利用一些方法來降低風險，當成本增加時，則會使投資報酬率下降，但是適當的提高財務槓桿則會投資報酬率上升，因此會使投資人比較不在意投資成本，所以透過投資模型分析，則投資人可以找出自己的最適槓桿程度。

McFarlane(2003)研究調整租金對市場的影響，根據許多學者的研究，發現不動產的租金收益率普遍都低估，是否是因為不動產價格過高，所以造成不動產的租金收益率太低。但是他們都沒有考量財務槓桿的效果，導致不動產的出租人願意接受較低的租金。因此本研究針對財務槓桿對實質租金收益率的效果來分析。

Plazzi et al.(2010)有研究商用不動產的報酬率與租金，針對辦公大樓、公寓、零售業大樓與工廠來做研究，發現實質報酬的變異高達30%是可以解釋，並且租金成長率的變異高達45%是可以解釋。並且使用租金房價比來預測未來的報酬率與租金成長率，他們發現，當不動產市場發生較高的租金房價比，則未來不動產的報酬率會上升，但是租金成長率卻會下降，因此，租金與房價是息息相關，所以本研究會探討影響租金與房價的行為。

本研究模型和Geltner et al.(2013)與Brueggeman & Fisher(2008)所設定的商用不動產報酬率是不一樣，他們的模型有包含租金收益與不動產資本利得，但是並未深入考慮財務槓桿效果。但是本模型是研究財務槓桿與毛租金對租金純益率的影響，並且進一步探討投資人的行為，並非是研究投資人對於不動產投資的決策，因為投資決策應該是以財務淨現值法為決策法則。因此，本研究模型有考慮財務槓桿效果與投資不動產相關成本，這也是本研究模型與其他研究的差異。而本研究的目的如下：

1. 在一個靜態的時間狀況下，則影響租金純益率的因素。
2. 在一個靜態的時間時，探討各種狀況下，則不動產投資人對毛租金與財務槓桿操作的行為。

二、租金收益模型

本研究先建立毛租金的定義，並且再把毛租金扣除不動產相關費用後，就是淨租金收

益，然後再根據財務槓桿的角度，把淨租金收益扣除利息費用後來計算投資人實質純益率。Tyrrell & Bostwick(2005)、Mantecon et al.(2012)、Tserlukevich(2008)也是以此概念來計算投資人的真實報酬率。並且本論文再進一步來分析影響不動產投資人的租金純益率的因素。

(一) 毛租金與淨租金收益率

本研究假設租金的來源有兩種，一個是地上物本身的價值產生的租金；另一個是土地本身的價值產生的租金，由於本研究只有考慮單純的租金收入，並未考慮相關的成本，因此本研究定義方程式(1)為毛租金，而毛租金除以房屋價格則為毛租金收益率，其方程式如下：

$$RA_t = H_0 \times (1-\delta)^t \times (1+g_1)^t \times r_1 + L_0 \times (1+g_2)^t \times r_2 \dots\dots\dots (1)$$

其中： RA_t 為第t期的租金。

H_0 為房屋期初價值。

δ 為房屋價值折舊率。

g_1 為房屋價值成長率。

g_2 為土地價值成長率。

r_1 為房屋要求報酬率。

r_2 為土地要求報酬率。

本研究模型有同時考慮地上物與土地本身價值的成長率，但由於土地沒有折舊的問題，所以本研究只有考慮地上物本身的折舊問題。因此，毛租金收益率的公式為毛租金除以不動產價值，如方程式(1a)：

$$Ra_t = \frac{RA_t}{H_0 + L_0} \dots\dots\dots (1a)$$

淨租金收益率的公式為毛租金扣除房屋整修費後，再除以不動產價值，如方程式(1b)：

$$Ra'_t = \frac{(RA_t - E_t)}{H_0 + L_0} \dots\dots\dots (1b)$$

其中： E_t 為房屋第t期的整修費用。

(二) 稅後租金收益率與槓桿租金收益率

因為不動產的地上物，每隔一段時間則必須維護，所以會產生維護相關的費用，因此投資人必須扣除其稅後費用才是真正的稅後租金收益，但是台灣不動產貸款利息可以有30萬元額度抵稅，所以在考慮利息的稅盾效果後，其方程式如下：

$$RB_t = (RA_t - E_t) \times (1-t_c) + I_t \times t_c \dots\dots\dots (2a)$$

由於台灣的不動產貸款利息抵稅額度有上限，所以可以抵稅的效果有其限制，其方程式如下：

$$I_t = \text{Min}[(H_0 - L_0) \times LTV \times r_0, I_t'] \dots \dots \dots (2b)$$

本研究假設租金收益率可以分成稅後租金收益率與槓桿租金收益率，其差異為考慮投資人投資的自有資金。稅後租金收益率為稅後租金收益除以購買的不動產價格，其方程式如下：

$$Rb_t = \frac{RB_t}{H_0 + L_0} \dots \dots \dots (2c)$$

本研究根據Tyrrell & Bostwick(2005)、Mantecon et al.(2012)、Tserlukevich(2008)的研究，在計算投資人報酬率時，應該是以投資人的自有資金方式來評估其報酬率，並非是以不動產的價值來評估，也就是會考慮財務槓桿的效果，其自有資金額度如下：

$$S = (H_0 + L_0) \times (1 - LTV) \dots \dots \dots (2d)$$

槓桿租金收益率為稅後租金收益除以投資人實際投資的金額，其方程式如下：

$$Rc_t = \frac{RB_t}{(H_0 + L_0) \times (1 - LTV)} \dots \dots \dots (2e)$$

其中： RB_t 為第t期的稅後租金收益。

E_t 為房屋第t期的整修費用。

t_c 為投資人稅率。

I_t 為借款人貸款利息抵稅費用。

I_t' 為借款人貸款利息抵稅費用上限額度。

S 為自有資金的金額。

LTV 為借款金額占市值的比率，也就是貸款成數。

(三) 投資人槓桿租金純益率

投資人真正的收益率是要考量實質資本的支出，假如投資人有利用財務槓桿來購買不動產，則投資人成本會包含財務槓桿的利息成本，因此投資人真正的租金收益，應該是考慮利息費用後的純益，但是台灣的貸款利息可以抵稅，可是有抵稅上限的限制，所以結果會有兩種狀況，其方程式如下：

1. 台灣的貸款利息抵稅未達上限

當借款人的利息費用未達抵扣的上限，則借款的利息都是可以抵稅，因此就會形成方程式(3a)。

$$RD_t = RB_t - \text{利息成本} = (RA_t - E_t) \times (1 - t_c) - (H_0 + L_0) \times LTV \times r_0 \times (1 - t_c) \dots \dots \dots (3a)$$

其中： LTV 為期初借款金額占市值的比率。

r_0 為投資人借款利率。

2. 台灣的貸款利息抵稅已達上限

當借款人的利息費用已達到抵扣的上限，則借款的利息不是都可以抵稅，因此就會形成方程式(3b)。

$$RD_t = RB_t - \text{利息成本} = (RA_t - E_t) \times (1 - t_c) - (H_0 + L_0) \times LTV \times r_0 + I'_t \times t_c \dots\dots\dots (3b)$$

根據以上的方程式，則投資人槓桿租金純益率為投資人純益除以自有資金，其方程式如下：

$$Rd = \frac{RD_t}{(H_0 + L_0)(1 - LTV)} = \frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c) - (H_0 + L_0) \times LTV \times r_0 + I'_t \times t_c}{(H_0 + L_0)(1 - LTV)} \dots\dots\dots (4)$$

三、財務槓桿對租金報酬率之探討

(一) 財務槓桿對租金純益率的影響

根據方程式(4)可以得知，槓桿租金純益率會受到LTV影響，因為LTV是投資人的財務槓桿程度，它是一個重要的財務因素。所以本研究推導LTV對租金純益率的影響，因此根據方程式(4)的槓桿租金純益率公式來做偏微分，則根據是否超過利息上限的狀況，其利息金額並未超過上限與利息金額已經超過上限，分別為方程式(5a)與方程式(5b)：

$$\frac{\partial Rd}{\partial LTV} = \frac{\frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c)}{(H_0 + L_0)} - r_0 \times (1 - t_c)}{(1 - LTV)^2} \dots\dots\dots (5a)$$

$$\frac{\partial Rd}{\partial LTV} = \frac{\frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c) + I'_t \times t_c}{(H_0 + L_0)} - r_0}{(1 - LTV)^2} \dots\dots\dots (5b)$$

根據方程式(5a)與(5b)，我們可以進一步分析貸款比率對槓桿租金純益率的影響，則會產生三種狀況，其結果如下：

$$\frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} > r_0 \text{ 或 } \frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c) + I'_t \times t_c}{(H_0 + L_0)} > r_0 \Rightarrow \frac{\partial Rd}{\partial LTV} > 0 \dots\dots\dots (6a)$$

$$\frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} = r_0 \text{ 或 } \frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c) + I'_t \times t_c}{(H_0 + L_0)} = r_0 \Rightarrow \frac{\partial Rd}{\partial LTV} = 0 \dots\dots\dots (6b)$$

$$\frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} < r_0 \text{ 或 } \frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c) + I_t' \times t_c}{(H_0 + L_0)} < r_0 \Rightarrow \frac{\partial Rd}{\partial LTV} < 0 \dots\dots\dots(6c)$$

根據方程式(6a)，當利息未達到上限與淨租金收益率大於借款利率時，或當利息已達到上限與稅後租金收益率大於借款利率時，則貸款比率與租金純益率成正相關，所以提高貸款比率則會使槓桿租金純益率上升，因此投資人應該多利用財務槓桿來投資不動產。

根據方程式(6b)，當利息未達到上限與淨租金收益率等於借款利率時，或當利息已達到上限與稅後租金收益率等於借款利率時，無論借款人如何使用財務槓桿，則槓桿租金純益率都不會改變。

根據方程式(6c)，當利息未達到上限與淨租金收益率小於借款利率時，或當利息已達到上限與稅後租金收益率小於借款利率時，則投資人應該多利用自有資金來投資不動產，不應該借款來投資。

由於現在金融市場的借款利率非常低，所以槓桿租金收益率很容易大於借款利率，透過提高財務槓桿就會使投資人的槓桿租金純益率上升，因此，可以解釋為何現在不動產投資會如此熱絡。

(二) 租金純益率變化

本研究為了要更進一步探討稅後租金收益的變化 dRA 與財務槓桿程度變化 $dLTV$ ，如何影響槓桿租金純益率 $Rd(RA, LTV)$ ，並且可以看出稅後租金收益的變化與財務槓桿程度變化的交互作用，所以利用全微分展開式來對槓桿租金純益率做全微分，由於展開三階誤差會很小，因此本研究只有考慮到第二階的展開式，並且考慮利息的抵稅效果並未達上限(註1)，其方程式如下：

$$dRd(RA, LTV) = \frac{\partial Rd}{\partial LTV} dLTV + \frac{\partial Rd}{\partial RA} dRA + \frac{\partial^2 Rd}{\partial LTV \partial RA} dLTV \times dRA \dots\dots\dots(7)$$

其中

$$\frac{\partial Rd}{\partial LTV} = \frac{\frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c)}{(H_0 + L_0)} - r_0 \times (1 - t_c)}{(1 - LTV)^2}$$

$$\frac{\partial Rd}{\partial RA} = \frac{(1 - t_c)}{(H_0 + L_0) \times (1 - LTV)}$$

$$dRd(RA, LTV) = \frac{\frac{(RA_t - E_t) \times (1 - t_c)}{(H_0 + L_0)} - r_0 \times (1 - t_c)}{(1 - LTV)^2} \times dLTV + \frac{(1 - t_c)}{(H_0 + L_0) \times (1 - LTV)} \times dRA + \frac{(1 - t_c)}{(H_0 + L_0) \times (1 - LTV)^2} \times dLTV \times dRA \dots\dots(8)$$

本研究探討財務槓桿變化與稅後租金收益變化的關係，所以分別假設在投資人兩種狀況下，來探討其行為關係：

1. 假設投資人在報酬已經滿足情況下，財務槓桿變化與稅後租金收益變化的行為。

當投資人已經滿足心目中的槓桿租金純益率，則我們假設投資人不會再追求更高槓桿租金純益率，所以當稅後租金收益變化下降時，他們可以透過財務槓桿變化來達成原本的槓桿租金純益率。在此情況下，不同的稅後租金收益變化則會對應一個不同的財務槓桿變化。根據以上的假設，本研究可以設定投資人槓桿租金純益率變化 $d(Rd)=0$ ，也就是投資人不再積極追求槓桿租金純益率。根據方程式(8)可以推論，在三種狀況下，財務槓桿變化與槓桿租金收益變化狀況：

$$(1) \text{ 當 } \frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} > r_0 \text{ 時。}$$

由於淨租金收益率大於借款利率，在假設投資人槓桿租金純益率變化 $d(Rd)=0$ 並且淨租金收益率大於借款利率時，則根據方程式(8)，財務槓桿變化會與毛租金收益變化成反比。所以只要稅後租金收益率大於借貸利率，並且在投資人的財務槓桿比率越高，由於財務槓桿效果，則他們可以忍受較低的毛租金收益，所以此結果可以解釋投資人為何可以接受較低的毛租金收益。因為投資人真正的報酬率是投資人槓桿租金純益率，並非是稅後租金收益率。因此，當投資人使用的財務槓桿較高，則他可以接受較低的毛租金收益。

$$(2) \text{ 當 } \frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} = r_0 \text{ 時。}$$

由於淨租金收益率等於借款利率，則根據方程式(8)，其財務槓桿變化會與租金收益變化如下：

$$d(Rd) = \frac{(1-t_c)}{(H_0 + L_0)} \times dRA \times \left(1 + \frac{dLTV}{(1-LTV)} \right) \dots\dots\dots(8a)$$

根據方程式(8a)，槓桿租金純益率變化 $d(Rd)$ 會受到財務槓桿程度、財務槓桿變化、稅率與毛租金收益變化的影響。假如 $d(Rd)$ 為0，由於毛租金收益變化 dRA 與財務槓桿程度變化 $dLTV$ 是獨立，所以毛租金收益變化 dRA 會等於0(註2)，因此， $dLTV$ 的變化程度只會受到原本財務槓桿程度的影響，可以得知投資人財務槓桿行為與毛租金收益變化無關。

$$(3) \text{ 當 } \frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} < r_0 \text{ 時。}$$

由於淨租金收益率小於借款利率，根據方程式(8)，不會同時發生 $dLTV>0$ 與 $dRA<0$ 情況，除此之外，在 $dLTV>0$ 時，財務槓桿變化會與毛租金收益變化成正比。也就當投資人增加其財務槓桿比率，則毛租金收益一定要提高，也就是毛租金收益變化 $dRA>0$ 才能達成投資人槓桿租金純益率不變，不然會造成槓桿租金純益率下降。

反向來探討，當投資人降低其財務槓桿比率，則在其它條件不變下，槓桿租金純益率會上升。所以假設槓桿租金純益率不變下，則投資人有降低其毛租金收益的空間。

但是有一個比較特殊的狀況，當發生 $dLTV < 0$ 與 $dRA > 0$ 情況，就是在財務槓桿比率下降時，則毛租金收益變化要上升，這樣才會達成假設槓桿租金純益率不變狀況。所以在稅後租金收益率小於借款利率時，則財務槓桿比率變化會與毛租金收益變化並沒有一定的方向關係。

根據以上的模型推導，本研究發現，借款成本 r_0 是影響投資人對毛租金收益要求的最大因素，而財務槓桿是一個加乘效果，也就是當財務槓桿越高，則會使影響槓桿租金純益率之因子的影響程度更高。只要稅後租金收益率高於借貸利率，則投資人可以利用財務槓桿的方式來提高其槓桿租金純益率，反之，當稅後租金收益率小於借貸利率時，要使 Rd 上升，則財務槓桿必須下降，或必須提高毛租金收益。由於台灣借貸利率非常小，所以投資人對於槓桿租金純益率的要求並不高，因此，本研究假設在投資人已經滿足槓桿租金純益率情況下，可以用來解釋市場上的毛租金收益率為何會比較低的原因。

2. 極大化投資人槓桿租金純益率之邊界條件

當投資人並未滿足心目中的槓桿租金純益率，因此投資人會再追求更高槓桿租金純益率，所以我們可以設定槓桿租金純益率變化 $d(Rd) > 0$ 前提下，根據方程式(8)，可以推論財務槓桿比率變化與毛租金收益變化之邊界條件：

(1) 毛租金收益率變化之下限門檻

根據方程式(8)的推論，要使槓桿租金純益率變化上升 $d(Rd) > 0$ ，則毛租金收益率變化 $\frac{dRA}{(H_0 + L_0)}$ 要符合方程式(9)的限制，則投資人槓桿租金純益率就會上升，所以方程式(9)是毛租金收益率變化 $\frac{dRA}{(H_0 + L_0)}$ 的下限。

因此，當財務槓桿比率改變時，要達成槓桿租金純益率上升，其毛租金純益率變化邊界條件則要符合方程式(9)來變化，只要毛租金收益率變化符合方程式(9)，則槓桿租金純益率變化就會大於0，也就是可以使槓桿租金純益率上升。

$$\frac{dRA}{(H_0 + L_0)} > \frac{\left(r_0 - \frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} \right)}{(1 - LTV)} \times dLTV \dots\dots\dots(9a)$$

$$\frac{dRA}{(H_0 + L_0)} > \frac{\left(r - \frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} \right)}{(1 - LTV + dLTV)} \times dLTV \dots\dots\dots(9b)$$

假如在財務槓桿比率不變時($dLTV = 0$)，則毛租金收益率變化下限會為零，因此，只要毛租金收益變化 dRA 大於0就可以使投資人槓桿租金純益率上升。

由於本研究狀況是假設投資人要透過毛租金收益率變化，進一步再提高槓桿租金純益率，因此必須根據稅後租金收益率、財務槓桿比率、購買的不動產價格、借款利率與財務槓桿比率變化，來決定投資人對毛租金變化行為是否要上升，或者有下降的空間，藉此可以解

釋租金與房價比是否過高或過低的問題。

(2)財務槓桿比率變化之下限門檻

A. $dRA \neq 0$

假設租金會調整與淨租金收益率 $\frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)}$ 不等於借款利率 r_0 時，則投資人透過調整財務槓桿比率，使槓桿租金純益率上升，則財務槓桿比率變化 $dLTV$ 之邊界條件必須符合方程式(10a)與方程式(10b)，才會使投資人的槓桿租金純益率上升。

$$dLTV > \frac{-(1-LTV)[(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0) + dRA] + \sqrt{\{(1-LTV)[(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0)] + (1-LTV) \times dRA\}^2 - 4 \times (1-LTV)^2 \times [(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0)] \times dRA}}{2 \times [(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0)]} \dots\dots\dots (10a)$$

$$dLTV < \frac{-(1-LTV)[(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0) + dRA] - \sqrt{\{(1-LTV)[(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0)] + (1-LTV) \times dRA\}^2 - 4 \times (1-LTV)^2 \times [(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0)] \times dRA}}{2 \times [(RA_t - E_t) - r_0(H_0 + L_0)]} \dots\dots\dots (10b)$$

B. $dRA = 0$

假如在不動產出租的租金不調整，也就是毛租金收益變化不變的情況下 ($dRA = 0$)，要使投資人的槓桿租金純益率上升，則投資人在調整財務槓桿比率時，對於財務槓桿比率變化 $dLTV$ 必須符合以下的方程式(10c)與方程式(10d)，由於一般的貸款成數不能超過100%與小於0，因此調整後的財務槓桿必須符合 $dLTV + LTV > 0$ ，所以方程式(10d)必須修改為方程式(10e)，因此投資人也可以透過財務槓桿變化 $dLTV$ 下降，使槓桿租金純益率上升。所以要使投資人的槓桿租金純益率上升，除了可以透過財務槓桿比率變化上升以外，也可以透過下降財務槓桿比率來達成目標，但是範圍必須符合方程式(10e)。

$$dLTV > 0 \dots\dots\dots (10c)$$

$$dLTV < LTV - 1 \dots\dots\dots (10d)$$

$$-LTV < dLTV < LTV - 1 \quad \text{當 } LTV > 0.5$$

$$-LTV > dLTV > LTV - 1 \quad \text{當 } LTV < 0.5 \dots\dots\dots (10e)$$

因為投資人提高財務槓桿有利也有弊，提高財務槓桿可以增加投資人的槓桿效果，但是卻也會產生利息費用，所以為了要使投資人的槓桿租金純益率上升，則可以透過提高或下降財務槓桿比率來達成目標，財務槓桿比率的變化的邊界條件，必須根據槓桿租金收益率、財務槓桿比率、期初不動產的價值、借款利率、毛租金與毛租金變化來決定，只要符合條件，就可以使槓桿租金純益率上升。

由於本研究根據方程式(9)、方程式(10a)與(10b)，我們可以得知，要使投資人的槓桿租金純益率上升，可以透過改變財務槓桿比率與改變毛租金來達成目標，但是必須符合邊界條件。但是當毛租金不變時，要透過改變財務槓桿比率來達成提高槓桿租金純益率，則必須符合方程式(10c)與(10e)。根據根據方程式(9)、方程式(10a)、(10b)、(10c)與(10e)得知，邊界條件會受到其它因素影響，所以本研究推導出財務槓桿比率變化與毛租金變化的邊界條件，希望透過邊界條件可以研究不動產投資人的行為，並且也可以提供最適決策。

(三) 槓桿租金純益率一階狀況分析

根據方程式(4)一階效用極大化的狀況，則 dRA 與 $dLTV$ 的關係式如下：

$$\frac{dRA}{dLTV} = - \frac{\frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} - r_0}{\frac{1}{(H_0 + L_0)}} = \frac{r_0(H_0 + L_0) - (RA_t - E_t)}{1 - LTV} \dots\dots\dots(11)$$

本研究可以根據方程式(11)進一步探討其靜態分析，當 LTV 小於1，也就是投資人沒有超貸情況下，當利息成本大於淨租金收益，則 dRA 與 $dLTV$ 會呈現正向關係；反之，當利息成本小於淨租金收益，則 dRA 與 $dLTV$ 會呈現反向關係，代表一個現象，就是當投資人要使槓桿租金純益率極大化，則毛租金變化 dRA 與財務槓桿的變化 $dLTV$ ，會受到財務槓桿程度、利息成本、毛租金與費用的影響。

四、數值分析

本研究根據以上推導的模型結果，並且結合表一的參數，當毛租金收益率變化和財務槓桿比率變化時，對槓桿租金純益率變化的影響做出分析，並且也對提高槓桿租金純益率的條件做研究，所以本研究模擬有兩個結果。第一，針對在不同的槓桿租金收益率與市場借款利率下，則槓桿租金純益率的變化情況做研究。第二，投資人提高槓桿租金純益率之財務槓桿比率與毛租金收益率變化門檻條件做研究。

1. 在不同的淨租金收益率與市場借款利率下，則槓桿租金純益率的變化情況

(1) 當 $\frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} > r_0$ 時。

根據表一假設，當淨租金收益率為3.4%，大於貸款利率3%，此時的槓桿租金純益率為4.4%。在市場的毛租金與投資人財務槓桿改變時，則槓桿租金純益率的變化如圖一，在財務槓桿不變時，毛租金的變化會與槓桿租金純益率的變化成正相關。但是在毛租金不變時，則財務槓桿的變化也會與槓桿租金純益率的變化成正相關。

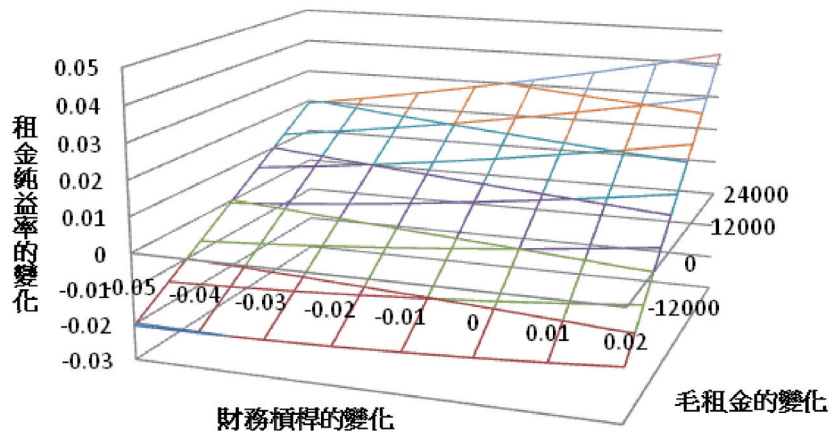
所以在提高財務槓桿時，則無論毛租金上升或下降，都會使槓桿租金純益率表現更佳，因為在稅後租金收益率大於借貸利率時，則透過提高財務槓桿會使借款的邊際收益上升，因此會使槓桿租金純益率正向上升。因此，此現象是可以解釋一個現象，就是為何台灣會如此

表一 基本參數表

基本參數	資料	備註
起始不動產價格(H+L)	3,000,000	假設15坪大樓，並且每坪20萬元。
貸款利率(r)	0.03	
毛租金(RA)	120,000	假設每月租金10,000元。
房屋整修費(E)	18,000	假設費用一年約18,000元。
財務槓桿(LTV)	0.8	
貸款利息(I)	72,000	台灣貸款利息抵稅金額為不超過30萬元。

說明：1. 資料來源是根據信義房屋資訊，在台北市大安區師大附近，2年內15坪大樓套房的平均價格與租金，而稅率是根據台灣最新版所得稅率，年所得在1,130,001以上的邊際稅率為12%。

2. 本研究也假設每年維修費用為一般市場的行情，也就是租金的15%。



圖一 稅後租金收益率大於借款利率時，財務槓桿與毛租金變化對槓桿租金純益率的變化

說明：毛租金的變化範圍是-12,000至24,000，財務槓桿變化範圍是-0.05至0.02。

低的租金報酬率的狀況。這個模型可以解釋張金鶚等(2009)針對房價與所得、房價與租金的分析，就是台北市在1973至2008年間，所得與租金推估之泡沫規模均達到高峰的因素，就是因為財務槓桿與低利率環境所造成的結果。因此，當毛租金收益是減少時，也可以透過提高財務槓桿來增加報酬率，所以槓桿租金純益率的變化會上升。

所以從圖一結果可以得知，當毛租金收益下降時，則透過適當的增加財務槓桿，也會使槓桿租金純益率上升。因此，毛租金收益的金額並非唯一對槓桿租金純益率的影響因素，必須搭配財務槓桿程度來判斷，所以可能會造成較低的毛租金收益，也會發生較高的毛租金收益率狀況。

當毛租金收益不變時，財務槓桿變化為增加10%時，則槓桿租金純益率會上升2.85%。當毛租金收益每年增加6,000元與財務槓桿維持80%時，則槓桿租金純益率會上升0.88%，但是財務槓桿上升10%時，則槓桿租金純益率會大幅上升4.17%，因此，除了增加毛租金收益會使槓桿租金純益率上升外，透過調整財務槓桿也可以進一步提高槓桿租金純益率。

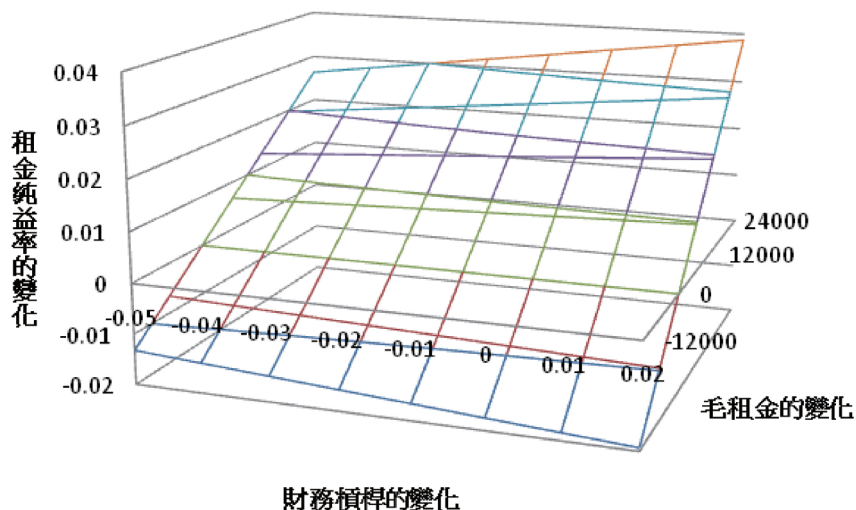
$$(2) \text{當 } \frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} = r_0 \text{ 時。}$$

當租金收益率與借款利率都相等時，此時投資人的槓桿租金純益率是不會受到財務槓桿的影響。在市場的毛租金與投資人財務槓桿改變時，則槓桿租金純益率的變化如圖二。當市場的毛租金不變時，槓桿租金純益率的變化不會受到財務槓桿變化的影響。當市場的毛租金下降時，財務槓桿的變化會與槓桿租金純益率的變化成負相關，但是在毛租金上升時，則財務槓桿的變化會與槓桿租金純益率的變化會成正相關。所以投資人可以透過財務槓桿的操作，就算是在毛租金下降時，也可以使槓桿租金純益率上升。所以透過財務槓桿就可以使槓桿租金純益率上升，當毛租金較低時，透過降低的財務槓桿，可以使槓桿租金純益率上升，因此，此現象可以解釋為何有些地區不動產會有較低的毛租金收益率。

當毛租金收益不變時，無論財務槓桿變化為多少時，則槓桿租金純益率都不會改變。在毛租金收益每年增加6,000元與財務槓桿維持80%時，則槓桿租金純益率會上升0.88%，但是財務槓桿上升10%時，則槓桿租金純益率會上升1.32%。但是當毛租金收益每年下降6,000元與財務槓桿維持80%時，則槓桿租金純益率會下降0.88%，但是財務槓桿下降10%時，則槓桿租金純益率只會下降0.44%。因此，在租金收益率與借款利率都相等時，投資人要提高槓桿租金純益率，則必須根據毛租金收益變化方向來調整財務槓桿。

$$(3) \text{當 } \frac{(RA_t - E_t)}{(H_0 + L_0)} < r_0 \text{ 時。}$$

由於租金收益率小於借款利率時，因為情況比較特殊，因此本研究把投資人分成高槓桿與低槓桿的兩種狀況來探討：



圖二 稅後租金收益率等於借款利率時，財務槓桿與毛租金變化對槓桿租金純益率的變化
說明：毛租金的變化範圍是-12,000至24,000，財務槓桿變化範圍是-0.05至0.02。

A.財務槓桿為80%

當租金收益率為3.4%，小於借款利率5%，此時的槓桿租金純益率為-2.64%。在市場的毛租金與投資人財務槓桿改變時，則槓桿租金純益率的變化如圖三。無論毛租金收益是增加或減少，透過調降財務槓桿比率時，則會改善槓桿租金純益率。所以在租金收益率小於借款利率，並且槓桿租金純益率為負，則除了可以增加毛租金收益來改善此現象以外，也可以透過調降財務槓桿比率來改善。

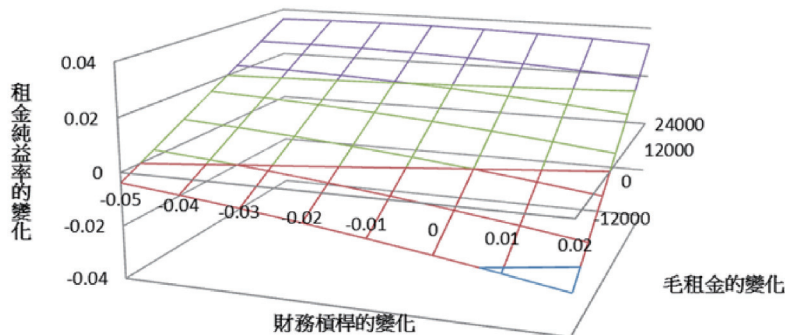
在毛租金收益每年增加18,000元與財務槓桿維持80%時，則槓桿租金純益率會上升2.64%，所以由負轉成損益兩平。但是財務槓桿下降5%與毛租金收益每年增加18,000元時，則槓桿租金純益率會上升2.92%，所以槓桿租金純益率會由虧轉盈。因此，透過調整財務槓桿，則投資人不需要大幅調整毛租金收益，也可以改善槓桿租金純益率。

B.財務槓桿為50%

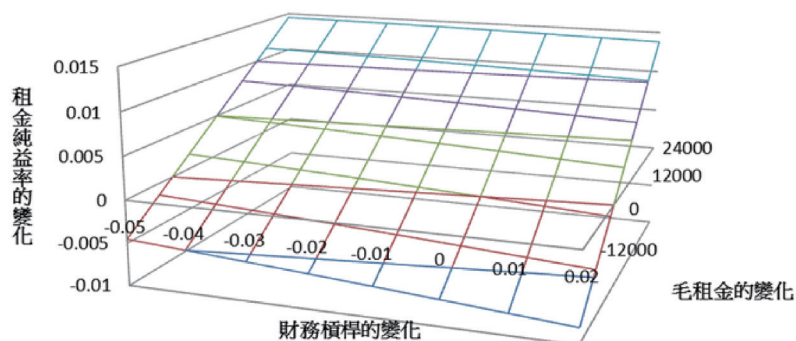
當稅後租金收益率為3.4%，小於借款利率5%，並且財務槓桿程度為50%，此時的槓桿租金純益率為1.584%。在市場的毛租金與投資人財務槓桿改變時，則槓桿租金純益率的變化如圖四，當財務槓桿程度較低，則無論毛租金下降或上升時，財務槓桿與槓桿租金純益率的變化成反比，所以投資人可以透過降低財務槓桿來提高槓桿租金純益率，因此，此時的財務槓桿比率越低越好。

在毛租金收益每年增加6,000元與財務槓桿維持不變時，則槓桿租金純益率會上升0.35%，假如財務槓桿增加約9%時，槓桿租金純益率會維持不變。所以在投資人缺少資金，並且要透過財務槓桿來增加資金來源時，則可以透過同時增加毛租金收益與財務槓桿程度，可以維持原本的槓桿租金純益率不變，但是可以提高投資的額度。

在租金收益率小於借款利率時，則負債的邊際貢獻程度為負，所以在財務槓桿程度越低時，投資人的槓桿租金純益率會比較高。由於不動產的價值不斐，假如投資人不使用財務槓桿，則必須投入許多自有資金，當投資人自有資金不足，或者需要透過財務槓桿來提高投資額度時，必須要較高租金收益才可以滿足要求報酬率。因此，根據此結果也可以解釋一個現象，就是當市場借貸利率較高時，投資人會要求較高的租金收益。



圖三 稅後租金收益率小於借款利率時，財務槓桿與毛租金變化對槓桿租金純益率的變化
說明：財務槓桿比率為0.8，毛租金的變化範圍是-12,000至24,000，財務槓桿變化範圍是-0.05至0.02。



圖四 稅後租金收益率小於借款利率時，財務槓桿與毛租金變化對槓桿租金純益率的變化
說明：財務槓桿比率為0.5，毛租金的變化範圍是-12,000至24,000，財務槓桿變化範圍是-0.05至0.02。

2. 投資人提高租金純益率之門檻條件

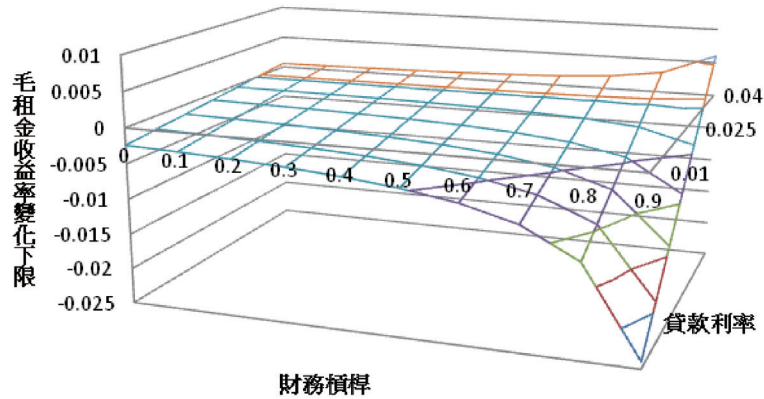
當投資人要追求更高報酬率，所以在槓桿租金純益率變化 $d(Rd) > 0$ ，則可以分別推導出財務槓桿比率變化與毛租金收益變化之邊界條件：

(1) 毛租金收益率變化之下限

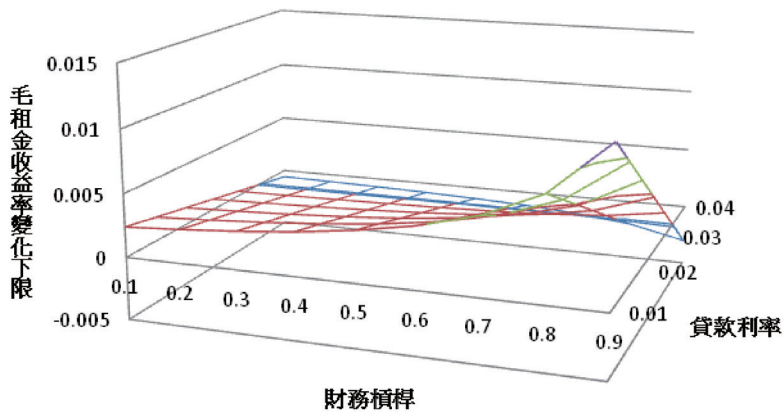
根據方程式(9)，則可以推導出毛租金收益率變化的下限，只要毛租金收益率變化大於此下限，則槓桿租金純益率變化就會上升。本研究假設投資人分別提高10%與下降10%的財務槓桿，根據表一參數，其模擬結果分別為圖五與圖六。根據圖五我們可以知道，在高財務槓桿與借款利率很低時，則推導出毛租金收益率變化的下限會小於0，表示毛租金收益率下降時，也可以使槓桿租金純益率上升，因此，在低利率與高財務槓桿時，則會使毛租金收益率變化之下限更低，也就是毛租金收益率下降幅度並未超過下限時，也會使投資人提高租金純益率，所以投資人更容易從投資上獲得更高的槓桿租金純益率，投資人雖然把毛租金往下調，表面好像犧牲了報酬率，但是透過增加財務槓桿比率，則租金純益率還是增加，因此，可能造成低的毛租金收益率現象。

本研究假設投資人下降10%的財務槓桿，所以模擬結果在圖六，根據圖六我們可以知道，在某一些狀況下，毛租金收益率變化的下限會小於0，表示當毛租金收益率下降時，也可以使槓桿租金純益率上升。但是在財務槓桿70%與貸款利率3%以下時最為明顯，表示毛租金收益率大幅下降時，也可以使槓桿租金純益率上升。因此，在低利率時，則最適財務槓桿比率約為70%為最佳，也就是投資人在此條件下，更容易從投資不動產獲得更高的槓桿租金純益率。

根據此結果可以說明，在低借款利率時，投資人為何可以忍受低毛租金收益率，因為透過財務槓桿可以使槓桿租金純益率上升。所以表面看起來是降低租金，但是實質上是可以提高槓桿租金純益率。但是從另一個角度來分析，代表投資人可以接受較高的不動產價格，因此，低借款利率與高財務槓桿可能推升不動產的價格。



圖五 當提高財務槓桿與租金純益率變化上升條件下，毛租金收益率變化之下限
 說明：財務槓桿的範圍是0至90%，貸款利率的範圍是1%至4%。

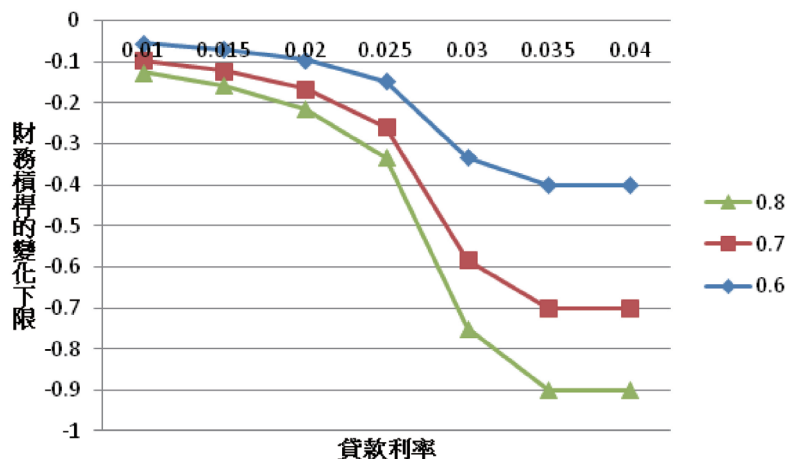


圖六 當降低財務槓桿與租金純益率變化下降條件下，毛租金收益率變化之下限
 說明：財務槓桿的範圍是0至90%，貸款利率的範圍是1%至4%。

(2)財務槓桿變化之下限

A.毛租金增加

根據方程式(10a)，則可以推導出財務槓桿變化的下限，只要財務槓桿變化大於此下限，則槓桿租金純益率變化就會上升。本研究根據表一的參數來分析，當毛租金增加時，則財務槓桿變化是可以往下調整。根據圖七可以知道，當投資人的財務槓桿分別為60%、70%與80%時，則財務槓桿下降也會使槓桿租金純益率變化上升。但是在利率較低的時候，則可以下降的幅度比較小，在借款利率比較高的時候，則財務槓桿的變化的下限越低，也就是財務槓桿往下調整的幅度可以很大，表示利率越大，則財務槓桿越高則越不利投資，所以財務槓桿大幅下降可以使槓桿租金純益率上升。



圖七 毛租金增加情況下，財務槓桿的變化下限

說明：財務槓桿的分別是0.6、0.7與0.8，貸款利率的範圍是1%至4%，並且毛租金增加10,000。

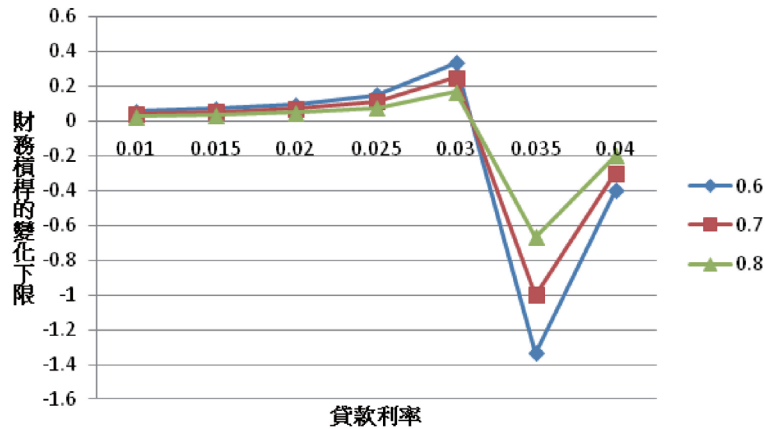
B.毛租金減少

當毛租金減少時，本研究根據表一的參數來分析，在借貸利率小於3%時，為了使槓桿租金純益率上升，則財務槓桿變化必須要往上調整。根據圖八可以知道，當市場利率超過名目淨租金收益率時，投資人的財務槓桿必須要下降才可以使槓桿租金純益率上升。在財務槓桿分別為60%、70%與80%時，則財務槓桿越大，則必須調整的幅度也會越大，才可以使槓桿租金純益率上升，表示財務槓桿越高，則必須要隨著利率變化大幅調整，才可以使槓桿租金純益率再往上升。

五、結論

由於投資人在投資不動產時，可以透過財務槓桿來投資，而財務槓桿的成本是要付出利息費用，不動產的收益是租金收入，只要不動產的租金收益大於利息費用，則投資人可以透過增加財務槓桿比率，使槓桿租金純益率上升。當毛租金收益率小於借款利率時，則投資人盡量不要使用財務槓桿來投資不動產，因為此行為會使槓桿租金純益率下降。但是在毛租金收益率等於借款利率時，則財務槓桿的改變不會影響槓桿租金純益率。

由於現在市場的借款利率很低，所以透過財務槓桿的操作，可以使槓桿租金純益率，比沒有透過財務槓桿操作的報酬率更高，因此，只要投資人有透過財務槓桿來投資不動產，則會使投資人產生接受較低的毛租金收益率行為，因此當毛租金收益較低時，投資人可以透過財務槓桿操作，使槓桿租金純益率上升，所以實證上往往會有毛租金收益率過低的現象產生，並且在借款利率較低的時候更加明顯。在市場的借款利率較低時，透過財務槓桿的操作，則投資人可以接受較低毛租金收益率，也表示投資人在毛租金不變的情況下，投資人可以接受較高的不動產價格，這代表較低的市場利率與財務槓桿的操作會使投資人接受較高的不動產價格，所以進一步會使不動產價格上升。



圖八 毛租金下降情況下，財務槓桿的變化下限

說明：財務槓桿的分別是0.6、0.7與0.8，貸款利率的範圍是1%至4%，並且毛租金下降10,000。

在借款利率比較高，並且在高於毛租金收益率時，則財務槓桿程度比較小會有利投資人，但是不動產投資金額過高，所以大部分都是透過財務槓桿投資，因此，為了使投資人的槓桿租金純益率上升或不變，投資人必須透過提高毛租金收益或降低購買不動產的金額，進一步使毛租金收益率上升，才不會使投資人的槓桿租金純益率受到損失，但是此行為會進一步提高不動產價格或提高毛租金收益。根據以上的分析，在市場利率比較高的時候，則投資人會對毛租金收益要求比較高，或者對於願意購買不動產的價格比較低。

由於不動產的價格不斐，並且現今台灣的利率非常低，所以可以透過適當的操作財務槓桿來提高槓桿租金純益率。由於現在台灣市場的資金比較寬鬆，因此投資人要利用財務槓桿來投資不動產是非常容易，所以會造成低毛租金收益率的現象，但是要注意未來利率上升或資金緊縮所造成的利率風險。本研究發現，在利用適當的財務槓桿時，由於投資人的自有資金可以比較少，所以會使槓桿租金純益率提高，因此本研究模型可以說明兩個現象，第一，是在利率比較低的情況下，投資人為何可以接受較低的毛租金收益與較高的不動產價格行為。第二，是在利率比較高的情況下，投資人為何可以要求較高的毛租金收益與較低的不動產價格行為。

註 釋

註1：由於台灣利息抵稅金額為新台幣三十萬，由於本國利率非常低，並且為了看出財務槓桿效果，所以假設利息費用並未超過新台幣三十萬，因此適用方程式(5a)。

註2：因為 $\frac{dLTV}{(1-LTV)}$ 會等於0。

參考文獻

中文部分：

張金鵬、陳明吉、鄧筱蓉、楊智元

2009 〈台北市房價泡沫知多少？—房價 vs. 租金、房價 vs. 所得〉 《住宅學報》
18(2)：1-22。

Chang C. O., M. C. Chen, H. J. Teng & C. Y. Yang

2009 “Is There a Housing Bubble in Taipei? - Housing Price vs. Rent and Housing Price vs. Income,” *Journal of Housing Studies*. 18(2): 1-22.

英文部分：

Brueggeman, W. B. & J. D. Fisher

2008 *Real Estate Finance and Investments*. 14th ed. New York: McGraw-Hill.

Geltner, D. M., N. G. Miller, J. Clayton & P. Eichholtz

2013 *Commercial Real Estate Analysis and Investments*. 3rd ed. OH: South-Western Educational Publishing.

Higgins, D.

2007 “Placing Commercial Property in the Australian Capital Market,” *Research Paper Series*. Australia RICS.

Mantecon, T., J. Conover, A. Altintig & K. Song

2012 “The Effects of the Reporting of Off-Balance-Sheet Investments on EPS Uncertainty, Leverage and Shareholders’ Wealth,” *Financial Management*. 41(4): 1009-1042.

McFarlane, B.

2003 “Proprietary Estoppel and Third Parties After the Land Registration Act 2002,” *The Cambridge Law Journal*. 62: 661-696.

Plazzi, A., W. Torous & R. Valkanov

2010 “Expected Returns and Expected Growth in Rents of Commercial Real Estate,” *The Review of Financial Studies*. 23: 3469-3519.

Tserlukevich, Y.

2008 “Can Real Options Explain Financing Behavior?” *Journal of Financial Economics*. 89: 232-252.

Tyrrell, N. & J. Bostwick

2005 “Leverage in Real Estate Investments: An Optimization Approach,” *Briefings in Real Estate Finance*. 5(3-4): 143-154.

