住宅學報 第一期 民國八十二年一月 學術論著 第1頁－20頁
JOURNAL OF HOUSING STUDY NO. 1, JAN. 1993 RESERACH pp. 1-20

所得確定與不確定情形下家戶房屋需求與區位選擇之比較研究*

Comparative Research of the Household's Housing Demand and Location Selection Under Income Certainty and Uncertainty

鍾世靜**

Shih-Ching Chung

摘 要

由於傳統的經濟學在分析經濟現象或解釋人類經濟行為時，常常假設生產者、消費者及生產因素供給者均聚集於同一區位(Location)上，因此運輸（或交通）成本及經濟單位的空間分佈形態並不受到重視。此種假設顯然無法充分反映經濟活動的真實狀況，因而導致近代空間經濟學(spatial economics)的興起。將空間因素納入經濟現象的分析中，可能會產生一些與傳統（非空間）經濟學不同的結果。這些結果更能圓滿地解釋真實社會的情況。

經濟單位在從事經濟決策時，面對著錯綜複雜、瞬息萬變的世界，往往因掌握的資訊(information)有限，或多或少總有一些無法確定的因素存在，使其面臨了如何在不確定(uncertainty)情形下從事最適經濟決策(optimal economic decision)的問題。不確定情形下的最適經濟決策和確定(certainty)情形下的最適經濟決策有何不同？這是一個非常值得探討的經濟課題。

在區域及都市經濟學(regional and urban economics)的領域中，Mai (1981)首先正式地以數學模型將不確定性因素引入廠商區位決策理論中（註1），將空間因素和不確定性結合，為空間經濟學注入了新的生命。另一方面，家戶(household)處於確定情形下，對房屋需求與區位選擇之行為理論已有相當多的文獻曾加以討論，其中最具代表性者如：Alonso (1964)、Muth (1968)及Henderson (1977)。然而，對於在不確定情形下，家戶房屋需求與區位選擇之理論探討，文獻上相當少見，值得參考的包括：Andrulis (1982)、DeSalvo and Eeckhoudt (1982)及Ioannides (1983)。他們在分析問題時，或使用特殊型態的效用函數，或賦予不確定性以特殊的機率密度函數，在數學的處理上顯得繁瑣，卻又不夠一般化(generality)。

本文的目的即針對前述文獻上的種種缺失，嘗試利用Rothschild and Stiglitz (1970)定義不確定性增加所使用的"mean preserving spread"概念，採用Sandmo (1971)不確定性的全面衝擊(overall impact of uncertainty)，並配合Sandmo (1969)(1970)所提風險規避者(risk averter)其行為符合「跨期風險規避程度遞減」的假說(hypothesis of decreasing temporal risk aversion)，以一個相當一般化的分析方式來研究當所得發生不確定，而家戶為一風險規避者時，對房屋的需求量與區位選擇的全面衝擊效果。

Abstract

This paper applies a very general method to study the effects of income uncertainty in housing demand and residential location. Under some reasonable assumptions, it can be show that the overall impact of income uncetrainty will cause a risk-averter to chose a smaller house and to live closer to the CBD.

---

* 本文係作者碩士論文的一章，作者感謝恩師台灣大學經濟學研究所麥朝成教授的諄諄教導，謹此致謝。文中如有任何錯誤，均應由作者負全部責任。

** 國立台灣大學經濟學研究所碩士，現任職於中央銀行經濟研究處。

一、模型設定與說明

考慮一個簡單的都市家戶住宅區位 (residential location) 模型：假定此都市之最內部有唯一的市中心區 (central business district，以下簡稱 CBD)，爲生產兼商業區，其範圍大小爲固定。都市家戶居住於 CBD 之外，需要仰賴交通往返於 CBD 與其住所，除於 CBD 內從事生產活動，以賺取所得外，並於該地購買商品，以供消費。再假定家戶爲風險規避者，其效用函數爲可三次微分之嚴格凹性 (strictly concave) 函數（註 2），且滿足 Von Neumann−Morgenstern 公理（註 3），而其邊際效用爲正值。效用函數的型態及特質可以表達如下：

$$U = U(q, x) \tag{1-1}$$

$$U_q > O, \quad U_x > O \tag{1-2}$$

$$U_{qq} < O, \quad U_{xx} < O, \quad U_{qq}U_{xx} - U^2_{qx} > O \tag{1-3}$$

家戶之預算限制 (budget constraint) 爲：

$$y = x + P(k)q + tk \tag{1-4}$$

以上各符號及其一些性質說明如下：

q：房屋對家戶所提供的服務，其數量以房屋所佔土地面積的大小來代表。並假定此爲一正常財貨 (normal goods)，

即 $q_y \equiv \dfrac{\partial q}{\partial y} > 0$。

x：房屋及交通支出以外的其他財貨消費量。又假定其單位價格爲一。

k：家戶住宅離 CBD 邊緣的距離。

P(k)：距離 CBD 爲 k 之房屋單位面積價格。

t：單位距離交通費率，我們只考慮交通之金錢面支出，而將交通之時間成本予以忽略不計（計 3）。並假定在分析期間內，家戶往返 CBD 與住宅間之交通次數爲固定，且 CBD 內無交通成本。爲簡化分析起見，在本章之分析中 t 視爲參數，且其值爲正 (positive)。

y：家戶之總所得。

假定在不確定情形時，家戶追求的目標爲在預算限制下追求預期效用之極大化。由於房屋屬耐久性消費財 (durable consumption goods)，其面積大小及坐落地點在家戶心目中有其一定理想之型態，再加上客觀條件之限制，短期內欲加以調整改變是比較不容易的。一般而言，x 顯然較 q 及 k 具有伸縮性。基於以上理由，我們將 q 及 k 視爲事前（即不確定性因素尚未消失前）之選擇變數 (choice variables)，且一經決定，即使在不確定性因素消失

而成爲確定後，在分析期間內均不再改變。x 則在不確定性因素消失而成爲確定後，由預算限制條件 (1−4) 決定，即：$x = y - P(k)q - tk$。因此 x 屬事後變數。又爲簡化分析起見，我們假定有關之不確定事項（所得）有一主觀機率密度函數 (subjective probability density function) 存在，它和不確定事項事後實現之客觀機率密度函數 (objective probability density function) 在分佈 (dispersion) 上均爲一有限範圍，不致使 x 在分析期間內產生負值。進一步言之：在分析期間內，我們不考慮借、貸的可能性，而且 q 及 k 之值均爲正（註 5）。

二、所得發生不確定時全面衝擊效果之探討

由於貨幣所得的變動、新的工作機會、失業的可能，……等因素的存在，使得家戶面臨了所得不確定的問題。本節擬探討：在所得不確定情形下，家戶房屋需求量與區位選擇之最適決策和確定情形下有何不同？此即 Sandmo (1971) 所謂不確定性之全面衝擊。在所得不確定性形下，家戶房屋需求與區位選擇的模型可建立如下：

$$\max_{q,k} E \{U[q, y - P(k)q - tk]\} \qquad (2\text{–}1)$$

其中：E 爲預期運算因子。

其一階條件 (first order condition) 爲：

$$\frac{\partial E \{U[q, y-P(k)q-tk]\}}{\partial q} \equiv E_q = E[U_q + U_x(-p)] = 0 \qquad (2\text{–}2)$$

$$\frac{\partial E \{U[q, y-P(k)q-tk]\}}{\partial k} \equiv E_k = -(P_k q + t) \cdot E(U_x) = 0 \qquad (2\text{–}3)$$

二階條件 (second order condition) 爲：

$E_{qq} < 0$，　$E_{kk} < 0$，以及

$$D = \begin{vmatrix} E_{qq} & E_{qk} \\ E_{kq} & E_{kk} \end{vmatrix} = E_{qq}E_{kk} - (E_{qk})^2 > 0 \qquad (2\text{–}4)$$

其中：

$$E_{qq} \equiv \frac{\partial^2 E\ \{U[q, y-P(k)q-tk]\}}{\partial q^2}$$

$$= E\,[\,U_{qq} - 2pU_{qx} + U_{xx}p^2\,] < 0 \qquad (2\text{–}5)$$

$$E_{kk} \equiv \frac{\partial^2 E\ \{U[q, y-p(k)q-tk]\}}{\partial k^2}$$

$$= E\,[-U_x P_{kk} q + (P_k q + t)^2 U_{xx}] < 0 \qquad (2\text{–}6)$$

$$E_{qk} = E_{kq} \equiv \frac{\partial^2 E\ \{U[q, y-p(k)q-tk]\}}{\partial q\ \partial k}$$

$$= E\,[-U_{xq}(P_k q + t) + U_{xx}(P_k q + t)\,p - P_k U_x] \qquad (2\text{–}7)$$

因為 $E(U_x) > 0$，由（2–3）我們可以得知：

$$P_k q + t = 0 \qquad (2\text{–}8)$$

由於 $U_x > 0$ 且 $P(k) > 0$，我們可從數學附錄之（A–17）得知：

$$(U_x U_{xxq} - U_{xx} U_{xq}) - p(k) \cdot [U_x U_{xxx} - (U_{xx})^2]$$

$$= U_x U_{xxq} - p(k) \cdot U_x U_{xxx} - U_{xx} U_{xq} + p(k) \cdot (U_{xx})^2 < 0$$

由上式進一步可推得：

$$U_x\,[U_{xxq} - p(k) \cdot U_{xxx}] < U_{xx} U_{xq} - p(k) \cdot (U_{xx})^2 \qquad (2\text{–}9)$$

為了便於判斷全面衝擊效果的方向，我們在此假定 $U_{qx} = U_{xq} \geqq 0$（註 6）。由於 $U_x > 0$、$U_{xx} < 0$、$U_{xq} \geqq 0$、$p(k) > 0$，將這些關係代入（2–9）左右兩邊，可以得知：

$$U_{xxq} - p(k) \cdot U_{xxx} < 0 \qquad (2\text{–}10)$$

我們想研究（2–2）中〔$U_q + U_x(-p)$〕究係 y 之凹 (concave) 函數或凸 (convex) 函數，可將其對 y 偏微分兩次，並利用（2–10），可以得知：

$$\frac{\partial^2 [U_q + U_x(-p)]}{\partial y^2} = \frac{\partial (U_{qx} - pU_{xx})}{\partial y} = U_{qxx} - pU_{xxx} < 0 \qquad (2\text{–}11)$$

在確定情形下，當 $y = \bar{y}$，而 $\bar{y}$ 為 y 發生不確定之期望值時，我們可以建立家戶之房屋需求與區位選擇模型如下：

$$\max_{q,k} U[q,\bar{y} - p(k)q - tk]$$

其一階條件爲：

$$\frac{\partial U}{\partial q} = [U_q - pU_x]_{y=\bar{y}} = 0 \text{（註 7）} \qquad (2\text{-}12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial k} = U_x(-P_k q - t) = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

二階條件爲：

$A < 0$，$B < 0$，以及

$$E = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C^2 > 0 \qquad (2\text{-}14)$$

其中：

$$A \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = U_{qq} - 2pU_{qx} + p^2 U_{xx} < 0 \qquad (2\text{-}15)$$

$$B \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial k^2} = -U_x P_{kk} q + U_{xx} \cdot (P_k q + t)^2 < 0 \qquad (2\text{-}16)$$

$$C \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial q \partial k} = \frac{\partial^2 U}{\partial k \partial q}$$
$$= -U_{qx} \cdot (P_k q + t) + U_{xx} \cdot (P_k q + t) \cdot P - P_k U_x \qquad (2\text{-}17)$$

因爲 $U_x > 0$，我們可將一階條件（2-13）重新改寫爲：

$$P_k q + t = 0 \text{（註 8）} \qquad (2\text{-}18)$$

因爲 $t > 0$，且 $q > 0$，由（2-18）可得知：

$$P_k = -\frac{t}{q} < 0 \qquad (2\text{-}19)$$

將（2-18）代入（2-16），可得知：

$$-U_x P_{kk} \quad q < 0$$

因爲 $U_x > 0$，且 $q > 0$，由上式我們可以得知：

$$P_{kk} > 0 \text{（註 9）} \qquad (2\text{-}20)$$

Muth (1968) 指出家戶本身對住宅的坐落位置並無偏好，故在其分析模型的效用函數中並未放入區位 (k) 這個變數（註 10）。但這並非表示家戶對 k 的選擇不會影響其效用水準，事實上，家戶對 k 的選擇會使得交通成本 tk 及房屋單位面積價格 p (k) 受到影響，進而透過預算限制 $y = x + p(k) \cdot q + tk$ 這個管道，使家戶在預算限制條件下，追求極大化的效用水準受到影響。

De Salvo (1977, p.2) 接受上述 Muth 的觀點，且更進一步假定：房屋所提供的勞務 (q) 與其他財貨消費量 (x) 的邊際效用不受區位 (k) 的影響。即 $U_k = U_{qk} = U_{kq} = U_{xk} = U_{kx} = 0$。我們在此亦可仿照 Muth (1968) 與 De Salvo (1977, p.2) 的觀點，在均衡 k 時，利用（2–8）或（2–18）可證得：

$$\frac{\partial U_q}{\partial k} = U_{qx}(-P_k q - t) = 0 \text{，且}$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial k} = U_{xx}(-P_k q - t) = 0 \qquad (2\text{–}21)$$

由（2–21）可進一步得知在均衡 k 時：

$$E\left(\frac{\partial U_q}{\partial k}\right) = (-P_k q - t)\,E(U_{qx}) = 0 \text{，且}$$

$$E\left(\frac{\partial U_x}{\partial k}\right) = (-P_k q - t)\,E(U_{xx}) = 0 \qquad (2\text{–}22)$$

將預期效用函數 $E\{U[q, y - p(k) \cdot q - tk]\}$ 對 q 微分，可得 $E_q = E[U_q + U_x(-p)]$。再進一步將 E_q 對 k 微分，並利用 $E(U_x) > 0$、（2–19）及（2–22）等關係，我們可以得知在均衡 k 時：

$$E_{qk} = E_{kq}$$

$$= E\left(\frac{\partial U_q}{\partial k}\right) - pE\left(\frac{\partial U_x}{\partial k}\right) - p_k E(U_x)$$

$$= -p_k E(U_x) > 0 \qquad (2\text{–}23)$$

（2–2）對 q 及 k 全微分，可得：

$$E_{qq}dq + E_{qk}dk = 0$$

利用（2–5）及（2–23），由上式我們可以得知：

$$\left.\frac{dk}{dp}\right|_{E_q = 0} = -\frac{E_{qq}}{E_{qk}} > 0 \qquad (2\text{–}24)$$

再者，（ 2−3 ）對 q 及 k 全微分，可得：

$$E_{kq}dq + E_{kk}dk = 0$$

利用（ 2−6 ）及（ 2−23 ），由上式我們可以得知：

$$\left.\frac{dk}{dq}\right|_{E_k=0} = -\frac{E_{kq}}{E_{kk}} > 0 \qquad (2\text{−}25)$$

利用（ 2−4 ）、（ 2−6 ）、（ 2−23 ）、（ 2−24 ）及（ 2−25 ）等關係，我們可以得知：

$$\left.\frac{dk}{dq}\right|_{E_q=0} - \left.\frac{dk}{dq}\right|_{E_k=0} = -\frac{E_{qq}}{E_{qk}} + \frac{E_{kq}}{E_{kk}}$$

$$= -\frac{E_{qq}E_{kk} - (E_{qk})^2}{E_{qk}E_{kk}} > 0 \qquad (2\text{−}26)$$

將（ 2−18 ）代入（ 2−17 ）右邊，再利用（ 2−19 ）及 $U_x > 0$ 可以得知在均衡 k 時：

$$C \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial q \partial k} = -P_k U_x > 0 \qquad (2\text{−}27)$$

現在讓我們再回頭討論在 $y = \bar{y}$ 確定下的情形。首先，（ 2−12 ）對 q 及 k 全微分，可得：

$$Adq + Cdk = 0$$

利用（ 2−15 ）及（ 2−27 ），由上式我們可以得知：

$$\left.\frac{dk}{dq}\right|_{\frac{\partial U}{\partial q}=0} = -\frac{A}{C} > 0 \qquad (2\text{−}28)$$

再者，（ 2−13 ）對 q 及 k 全微分，可得：

$$Cdq + Bdk = 0$$

利用（ 2−16 ）及（ 2−27 ），由上式我們可以得知：

$$\left.\frac{dk}{dq}\right|_{\frac{\partial U}{\partial k}=0} = -\frac{C}{B} > 0 \qquad (2\text{−}29)$$

利用（2−14）、（2−16）、（2−27）、（2−28）及（2−29）等關係，我們可以得知：

$$\frac{dk}{dq}\bigg|_{\frac{\partial U}{\partial q}=0}-\frac{dk}{dq}\bigg|_{\frac{\partial U}{\partial k}=0}=-\frac{A}{C}+\frac{C}{B}$$

$$=-\frac{AB-C^2}{CB}>0 \qquad (2-30)$$

現在我們利用圖 2−1 來分析不確定 y 的全面衝擊效果。首先定義：當家戶面對所得爲 $y=\bar{y}$ 確定情形時，$\bar{N}_1$ 及 $\bar{N}_2$ 分別代表在 q − k 平面上滿足一階條件（2−12）及（2−13）之點集合 (sets of points)，同時集合 $\bar{N}_1$ 及 $\bar{N}_2$ 之所有點亦滿足二階條件（2−14）。由（2−28）知 $\bar{N}_1$ 爲正斜率，由（2−29）知 $\bar{N}_2$ 亦爲正斜率，由（2−30）知 $\bar{N}_1$ 之斜率較 $\bar{N}_2$ 之斜率爲陡，而 $\bar{N}_1$ 與 $\bar{N}_2$ 之交點（$\bar{q}, \bar{k}$）即爲當 y 確定爲 $\bar{y}$ 時，家戶之最適房屋需求量與最適區位。另外定義：當家戶面對 y 處於不確定情形時，N_1 及 N_2 分別代表在 q − k 平面上滿足一階條件（2−2）及（2−3）之點集合，同時集合 N_1 及 N_2 之所有點亦滿足二階條件（2−4）。由（2−24）知 N_1 爲正斜率，由（2−25）知 N_2 亦爲正斜率，由（2−26）知 N_1 之斜率較 N_2 之斜率爲陡，而 N_1 與 N_2 之交點（q^*, k^*）即爲當 y 爲不確定時，家戶之最適房屋需求量與最適區位。Rothschild and Stiglitz (1970) 所提出的“mean preserving spread”概念中除了包含由一個不確定的情形演變到另一個更不確定的情形外，同時也包含了由一個確定的情形演變到一個不確定的情形。進一步再根據 Rothschild and Stiglitz (1970, p.237) 所推導的結果：「當函數的自變數 (argument) 處於“mean preserving spread”的情形下，而此函數爲此自變數之凸（或凹）函數時，則此凸（或凹）函數的期望值將增加（或減少）。」準此，由（2−11）知〔$U_q+U_x(-p)$〕爲 y 之凹函數，因此我們可以得知當 y 處於“mean preserving spread”的情形下，凹函數〔$U_q+U_x(-P)$〕之期望值 E〔$U_q+U_x(-p)$〕比 y 確定爲 $\bar{y}$ 時之函數值〔$U_q+U_x(-p)$〕$y=\bar{y}$ 爲小。由（2−15）、（2−27）及上述對 $\bar{N}_1$ 與 N_1 之定義及討論，我們可以得知：N_1 整個位於 $\bar{N}_1$ 之左上方（註 11）。再由（2−8）及（2−18）可知所得不確定與確定情形下，雙方的第二條一階條件相同，因此 N_2 與 $\bar{N}_2$ 兩者重合爲一。

最後，由圖（2−1）我們可以很清楚的看出 $q^*<\bar{q}$ 且 $k^*<\bar{k}$。換言之，如果家戶爲風險規避者，則在 y 不確定情形下，家戶之最適房屋需求量將比 $y=\bar{y}$ 確定情形下爲少；家戶之最適住宅區位將比 $y=\bar{y}$ 確定情形下更接近 CBD。

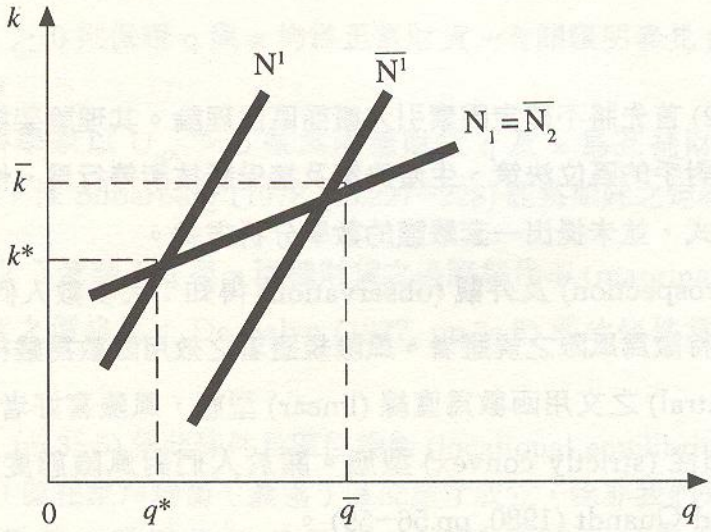

圖 2-1

三、結論

本文以相當精簡的模型設定，配合一般化的數學處理方式，將不確定經濟理論與空間經濟理論中「家戶房屋需求與住宅區位選擇」的問題相結合。我們發現：

(一)當家戶爲一風險規避者，且須在不確定因素實現前同時決定房屋需求量與區位選擇，則在下面三個假設條件：

1.效用函數〔U（q,x）〕具 $U_{qx} = U_{xq} \geqq 0$ 的性質；

2.效用函數符合 Sandmo (1969)(1970) 所提之「跨期風險規避程度遞減」假說；及

3.定義不確定性增加時使用 Rothschild and Stiglitz (1970) 所提出的"mean preserving spread"概念之下，可得如下的一些結論：

所得 (y) 爲不確定時，家戶之最適房屋需求量將比 $y = \bar{y}$ 確定情形下爲少；家戶之最適住宅區位將比 $y = \bar{y}$ 確定情形下更接近 CBD。

本文對家戶住宅面積及區位決定在分析上只考慮需求面的情形，而將住宅供給面的情形完全忽略。若能將住宅供給面及其不確定因素一併納入考慮，以建立一個一般均衡 (general equilibrium) 模型的分析方式，將各種供給面與需求面之不確定因素同時予以考慮，當可得到更一般化的結論。

註　釋

註 1：Webber (1972) 首先將不確定因素引入廠商區位理論。其理論架構中，不確定性乃肇因於廠商競爭對手的區位決策、生產決策及接受新技術等行爲。惟其分析上僅限於敍述及建議性方式，並未提出一套嚴謹的數學分析方式。

註 2：根據內省 (introspection) 及外觀 (observation) 得知：大多數人們在大多數的決策下所表現的行爲特徵爲風險之規避者。風險規避者之效用函數爲嚴格凹性型態，風險中立者 (risk neutral) 之文用函數爲直線 (linear) 型態，風險喜好者 (risk lover) 之效用函數爲嚴格凸性 (strictly convex) 型態。關於人們對風險態度的詳細討論可參見 Henderson and Quandt (1980, pp.56−59)。

註 3：關於 Von Neumann−Morgenstern 公理的介紹及其效用指數究竟屬於計數的 (cardinal) 或序列的 (ordinal) 性質討論，可參見 Henderson and Quandt (1980, pp.52−56)。

註 4：Muth (1969, pp.17−36) 把所得變數放入交通成本函數中，考慮交通的時間成本。若將所得放入交通成本函數中，則當所得發生不確定時，會使得交通成本亦發生不確定，而造成雙重不確定。爲避免複雜的分析，也爲了能產生較明確的結論，因此我們在本章只討論單獨事項之不確定情形，而不考慮交通之時間成本。

註 5：爲了便於從事以下之比較靜態分析起見，我們只關心最適房屋需求量與最適區位爲內部解 (interior solution) 的情形，而將角隅解 (corner solution) 的情形予以排除。事實上這樣的處理方式並未失去一般性。

註 6：爲了得到（2−10），其實我們只需假定 $U_{qx} = U_{xq} \geqq p(k) \cdot U_{xx}$ 即可。De Salvo and Eeckhoudt (1982, pp.101−104) 在所得不確定的情形下，曾假定在 x − q 平面上 q 對 x 的邊際代替率 (the marginal rate of substitution of q for x) 會隨 x 的增加而增加〔即 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U_q}{U_x}\right) > 0$〕，而推得 $(U_{qx} - pU_{xx})\, y_u > 0$ 的結論，其中 y_u 爲失業救濟所得。另外，De Salvo and Eeckhoudt (1982, pp.104−105) 在所得不確定的情形下，假定 $\frac{\partial q}{\partial y_e} > 0$，而推得 $(U_{qx} - pU_{xx})\, y_e > 0$ 的結論，其中 y_e 爲就業所得。至於在所得確定的情形下，假定 $\frac{\partial q}{\partial y} > 0$，亦可推得 $(U_{qx} - pU_{xx}) > 0$。我們現在進一步做 $U_{qx} = U_{xq} \geqq 0$ 較爲强烈的假設，除爲敍述便利外，尚有以下一些有趣的性質：

(1)在 q − x 平面上，若 $U_{qx} = U_{xq} \geqq 0$ 則保證無異曲線 (indifference curve) 凸向原點。有關證明詳見（石齊平，民國七十二年，頁 28−29 ）。

(2)若 $U_{qx} = U_{xq} \geqq 0$ 則保證 q 與 x 均爲正常財貨。有關證明參見 (Silberberg, 1978, pp.239−240)。

(3)曾經有些經濟學家以 $U_{qx} > 0$ 做爲兩種財貨 q 及 x 爲互補財 (complementary goods) 之定義。惟 Silberberg (1978, pp.227−228) 認爲如此之定義並不恰當。

註 7：此時 $\frac{U_q}{U_x} = p(k)$ 意謂：q 與 x 兩種財貨之邊際替代率 (marginal rate of substitution) 等於兩財貨之價格比。De Salvo (1977, pp.3−5) 稱此條件爲財貨均衡 (goods equilibrium)。

註 8：De Salvo (1977, pp.3−5) 稱此條件爲區位均衡 (locational equilibrium)。

註 9：此式及（ 2−19 ）僅在家戶均衡（最適）區位處才成立，除非我們知道（或假定）對應家戶均衡（最適）房屋需求量及區位之效用函數值爲全域極大 (global maximum)，才能進一步引申：對所有討論範圍內之區位此式及（ 2−22 ）均成立。見 De Salvo (1977, p.5, footnote 5)。

註10：Alonso (1964, pp.18−35) 把區位變數放入效用函數中，並假定 $U_k = \frac{\partial U}{\partial k} < 0$，將交通帶給人們的不適與成本視爲負效用 (disutility)，而直接於效用函數中表示，距離 CBD 愈遠，交通帶來的負效用愈强。事實上區位的屬性（如：環境污染程度、公共設施的多寡、土壤的肥沃程度……等）才是直接影響效用的重要因素。Alonso 只考慮區位到達 CBD 之可接近性 (accessibility) 此種屬性，而假定 $U_k = \frac{\partial U}{\partial K} < 0$，未免太過單純，且未必正確。

註11：只有當 $\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{y=\bar{y}} = [U_q + U_x(-p)]_{y=\bar{y}} > 0$ 時，不確定 y 情形下的預期函數值 $E[U_q + U_x(-P)]$ 才可能等於零。又由於：

(1) $A = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$，因此在不變動 $\overline{M}_1$ 上 k 坐標的情形下，惟有減少 q，才能提升 $\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{y=\bar{y}}$，使其值爲正。

(2) $C = \frac{\partial^2 U}{\partial q \partial k} > 0$，因此在不變動 $\overline{M}_1$ 上 q 坐標的情形下，惟有增加 k，才能提升 $\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{y=\bar{y}}$，使其值爲正。

綜合(1)與(2)可以得知：M_1 整個位於 $\overline{M}_1$ 之左上方。

數學附錄

在進行數學演算前，我們先介紹 Sandmo (1969) (1970) 所提「跨期風險規避程度遞減」的假說。Sandmo 採用兩期（現在與未來）模型，來探討當風險規避者面對未來所得或未來利率爲不確定時，對現在的消費、儲蓄或資產選擇 (portfolio selection) 行爲會有什麼影響？而 Sandmo 在處理一些比較靜態問題，判斷性質符號時，遭遇困難。所以他提出一個直覺上相當合理的「跨期風險規避程度遞減」假說，以求能解決判斷性質符號之困擾。Sandmo (1969, pp.591−592) 首先提出「跨期風險貼水」及「跨期風險規避」的概念 (concepts of risk premium and risk aversion in a temporal context) 如下：

假定某消費者爲一風險規避者，他現在的消費爲一固定水準 C_1。今對此消費者提供一個關於未來消費水準 C_2 的公平賭博機會：若他贏了，則未來的消費水準爲 C_2+h，若他輸了，則未來的消費水準爲 C_2-h，而輸、贏的機率各爲½。在此，我們想探索的問題是「如何測度局部跨期風險規避程度 (a measure of local risk aversion for temporal risks) 的大小」？此時，h 爲一相當小的正數。消費者的效用函數爲 $U(C_1, C_2)$，此賭博之預期效用爲 $\frac{1}{2}U(C_1, C_2+h)+\frac{1}{2}U(C_1, C_2-h)$，此賭博預期結果之效用 (utility of the expected outcome of the gamble) 爲 $U[C_1, \frac{1}{2}(C_2-h)+\frac{1}{2}(C_2+h)]=U(C_1,C_2)$。

就一個風險規避者而言：在確定擁有 (C_1,C_2) 與參加此公平賭博兩種選擇機會下，他會拒絕後者，而選擇前者（註 1），此即意謂著：

$$U(C_1,C_2)>\frac{1}{2}U(C_1,C_2+h)+\frac{1}{2}U(C_1,C_2-h)$$

換言之：風險規避者寧願由其確定擁有 (C_1,C_2) 的情形下，扣除一些 C_2，以求能免除因參加前述公平賭博而使其面臨風險的情況。此風險規避者之最大可容忍的 C_2 扣除額，謂之跨期風險貼水（註 2）。我們可以下列方程式定義一個正的跨期風險貼水 R。

$$U(C_1,C_2-R)=\frac{1}{2}U(C_1,C_2+h)+\frac{1}{2}U(C_1,C_2-h) \qquad (A-1)$$

將 (A−1) 兩邊同乘以 2 以後，再同時減去 $2U(C_1,C_2)$，可得：

$$2\{U(C_1,C_2-R)-U(C_1,C_2)\}$$
$$=U(C_1,C_2+h)-U(C_1,C_2)+U(C_1,C_2-h)-U(C_1,C_2) \qquad (A-2)$$

在此，我們假定效用函數 U 爲一可三次微分之連續函數 (continuous function)，且爲 C_1 與 C_2 之嚴格遞增函數 (strictly increasing function)。又由於前述 h 值爲一相當小的正數，觀察 (A−1) 可得知下式成立：

$$\frac{U(C_1,C_2)-U(C_1,C_2-R)}{R}\approx U_2(C_1,C_2)$$

將上式兩邊同乘以（－R），可得：

$$U(C_1,C_2-R)-U(C_1,C_2)\approx -RU_2(C_1,C_2) \qquad (A-3)$$

此處≈表示近似於 (approximately equal to)

將（A−3）代入（A−2）左邊後，再以 h 同除兩邊，我們可得下列之近似式：

$$-\frac{2RU_2(C_1,C_2)}{h}$$

$$=\frac{U(C_1,C_2+h)-U(C_1,C_2)}{h}-\frac{U(C_1,C_2)-U(C_1,C_2-h)}{h}$$

$$=\frac{U(C_1,C_2+h)-U(C_1,C_2)}{h}-\frac{U[C_1,(C_2-h)+h]-U(C_1,C_2-h)}{h}$$

進一步我們可以將上式化爲：

$$-\frac{2}{h}RU_2(C_1,C_2)=U_2(C_1,C_2)-U_2(C_1,C_2-h)$$

再以 h 除上式兩邊，我們可得下列之近似式：

$$-\frac{2}{h^2}RU_2(C_1,C_2)=\frac{U_2(C_1,C_2)-U_2(C_1,C_2-h)}{h}$$

$$=U_{22}(C_1,C_2)$$

將上式左右兩邊同除以〔$-U_2(C_1,C_2)$〕，可得：

$$\frac{2}{h^2}R=-\frac{U_{22}(C_1,C_2)}{U_2(C_1,C_2)} \qquad (A-4)$$

由於 $R>0$，$U_2>0$，由（A−4）可知風險規避者之效用函數需要滿足 $U_{22}<0$ 的性質。

前述公平賭博的期望值如下：

$$E(C_2)=\tfrac{1}{2}(C_2+h)+\tfrac{1}{2}(C_2-h)=C_2 \qquad (A-5)$$

由（ A−5 ）可推得此公平賭博的變異數如下：

$$\begin{aligned} Var(C_2) \quad \sigma^2_{C2} &= \tfrac{1}{2}[(C_2+h)-E(C_2)]^2+\tfrac{1}{2}[(C_2-h)-E(C_2)]^2 \\ &= \tfrac{1}{2}h^2+\tfrac{1}{2}(-h)^2=h^2 \end{aligned} \qquad (A-6)$$

將（ A−6 ）代入（ A−4 ）的左邊之後，再以 $\sigma^2_{C_2}$ 同乘以左右兩邊，可得：

$$R=-\frac{U_{22}(C_1,C_2)}{U_2(C_1,C_2)}\cdot\frac{\sigma^2_{C2}}{2} \qquad (A-7)$$

Sandmo (1969, p.592) 稱（ A−4 ）爲風險規避函數 (risk aversion function)。再由（ A−7 ）可知：在 $\sigma^2_{C_2}$（或 h ）固定下，測度風險規避程度大小所使用的判斷指標——風險貼水 R〔或（$-\frac{U_{22}}{U_2}$）〕——完全依 C_1 與 C_2 的水準而定。而 Pratt (1964) 與 Arrow (1971) 討論的是「無時間性風險貼水」及「無時間性風險規避」的概念 (concepts of risk premium and risk avension in a timeless context)。Pratt (1964, p.125) 的局部性風險貼水亦類似於（ A−7 ），惟只含一個變數 x（貨幣），而非 C_1、C_2 兩個變數。兩人研究的皆是一個定點時間消費者風險規避程度如何測度的問題。

另外，Sandmo 又提出風險規避程度（即 R 或〔$-\frac{U_{22}(C_1,C_2)}{U_2(C_1,C_2)}$〕）爲 C_2 之遞減函數的說法，他認爲這是一個直覺上相當合理的假說。就像 Arrow (1971, p.96)「絕對風險規避程度遞減假說」(hypothesis of decreasing absolute risk aversion) 一樣，當消費者預期未來消費水準會增加（減少）時，他參加公平賭博的意願將加强（降低），要求的跨期風險貼水 R〔或 $-\frac{U_{22}(C_1,C_2)}{U_2(C_1,C_2)}$〕將下跌（上升），即：

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\left(-\frac{U_{22}}{U_2}\right)<0 \qquad (A-8)$$

Sandmo 又進一步提出跨期風險規避程度爲 C_1 之遞增函數的說法。他認爲當現在的消費水準增加時，在其他條件不變下，將使得未來的消費水準降低，所以消費者現在的消費水

準增加（減少）時，他參加此未來消費之公平賭博的意願將降低（加强），要求的跨期風險貼水 R〔或$-\frac{U_{22}(C_1,C_2)}{U_2(C_1,C_2)}$〕將上升（下跌），即：

$$\frac{\partial}{\partial C_1}\left(-\frac{U_{22}}{U_2}\right)>0 \qquad (A-9)$$

當 C_2 增加且 C_1 減少時，則風險規避之消費者要求跨期風險貼水 R〔或$-\frac{U_{22}(C_1,C_2)}{U_2(C_1,C_2)}$〕下跌的意願比單獨 C_2 增加或 C_1 減少時，更爲增强。而當 C_2 減少且 C_1 增加時，則風險規避之消費者要求跨期風險貼水 R〔或$-\frac{U_{22}(C_1,C_2)}{U_2(C_1,C_2)}$〕上升的意願比單獨 C_2 減少或 C_1 增加時，亦更爲增强。

爲避免不必要的複雜性，在模型的設定中，我們將兩期模型化爲一期，我們要討論的是「所得的不確定」，而非「未來所不確定」。但仍屬「遲滯性或跨期性風險 (delayed or temporal risk)」的性質，而非「無時間性風險 (timeless risk)」的性質。前者其事前變數一經決定，則在分析期間內不再改變，後者隨著時間的過往，選擇變數可以不斷地調整（註 3）。

細究第一節，我們可以得知 q 即相當於本附錄開始時所提的 C_1，x 相當於 C_2。沿用上述「跨期風險規避程度遞減假說」之概念及推演，我們可以從新展開推演如下：

$$d\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)dq+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)dx \qquad (A-10)$$

由預算限制式（1−4）知：

$$x=y-p(k)q-tk \qquad (A-11)$$

在其他條件（即 y，k，t）不變的情形下，x 與 q 之間存著反向的關係，我們可以利用（A−11）證明如下：

$$dx=-p(k)dq \qquad (A-12)$$

進而得知在其他條件不變的情形下：

$$dq = -\frac{1}{p(k)}dx \qquad (A-13)$$

因為 p（k）＞0，由（A−13）可得知：

$$dq \gtrless 0 \quad iff \quad dx \lessgtr 0 \qquad (A-14)$$

仿（A−8）我們可以得知：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right) = -\frac{U_x U_{xxx} - (U_{xx})^2}{(U_x)^2} < 0 \qquad (A-15)$$

仿（A−9）我們可以得知：

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right) = -\frac{U_x U_{xxq} - U_{xx} U_{xq}}{(U_x)^2} > 0 \qquad (A-16)$$

將（A−13）代入（A−10）右邊可得：

$$d\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)\left[-\frac{1}{p(k)}\right]dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)dx$$

由前述之「跨期風險規避程度遞減」假說，並利用（A−14）、（A−15）、（A−16）我們可以將上式化為如下的結果：

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right) = -\frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)\cdot\left[\frac{1}{p(k)}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)$$

$$= \frac{(U_x U_{xxq} - U_{xx} U_{xq}) - p(k)\cdot[U_x U_{xxx} - (U_{xx})^2]}{(U_x)^2 \cdot p(k)} < 0 \qquad (A-17)$$

將 $\left(-\frac{U_{qx}}{U_x}\right)$ 對 x 偏微分，可得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{qx}}{U_x}\right) = -\frac{U_x U_{qxx} - U_{qx} U_{xx}}{(U_x)^2} \qquad (A-18)$$

比較（ A−16 ）與（ A−18 ），可以得知：

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{qx}}{U_x}\right) \qquad (A-19)$$

將（ A−19 ）代入（ A−17 ）第一個等式右邊中，我們可以得知：

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{qx}}{U_x}\right)\cdot\left[\frac{1}{p(k)}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{U_{xx}}{U_x}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{P(k)}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U_{qx}-p(k)\cdot U_{xx}}{U_x}\right]<0$$

因爲 P（ k ）＞0，由上式可得知：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U_{qx}-p(k)\cdot U_{xx}}{U_x}\right]<0 \qquad (A-20)$$

數學附錄　　註釋

註 1 ：可參見 Arrow (1971, p.95) 。

註 2 ：可參見 Hey (1979, pp.49−50) 。

註 3 ：可參見 De Salvo and Eeckhoudt (1982, p.99) 及 Drèze and Modigliani (1972, p.309) 。

參考文獻

石齊平：

1983〈當代個體經濟理論與應用〉，七版，台北：三民書局。

Alonso, W.

1964 Location and Land Use. Cambridge: Harvard Univ. Press.

Andrulis, John

1982 "Intra-Urban Workplace and Residential Mobility Under Uncertainty", Journal of Urban Economics 11: 85-97

Arrow, K.J.

1971 Essays in the Therory of Risk-Bearing. Harvard Univ. North-Holland Press.

De Salvo, J.S.

1997 " Urban Household Behavior in a model of Completely Centralized Employment", Journal of Urban Economics. 4: 1-14.

De Salvo, J.S. & Eeckhoudt, Louis R.

1982 "Household Behavior Under Income Uncertainty in A Monocentric Urban Area", Journal of Urban Economics. 2: 98-111.

Drèze, J.H. & Modigliani, F.

1972 "Consumption Decision Under Uncertainty", Journal of Economic Theory. 5: 308-335.

Henderson, J.

1977 Economic Theory and the Cities. New York: Academic Press.

Hendersion, James M. & Quandt, Richard E.

1980 Microeconomic Theory. New York: Mc Graw-Hill.

Hey, John D.

1979 Uncertainty in Microeconomics. New York Univ. Press.

Ioannides, Yannis M.

1983 "Location Decisions Under Uncertainty and the Urban model", Economics Letters. 11: 291–295.

Mai, Chao–Cheng

1981 "Optimal Location and the Theory of the Firm Under Demand Uncertainty", Regional Science and Urban Economics. 11 : 549–557.

Muth, R.

1968 Cities and Housing. Univ of Chicage Press.

Pratt, J.W.

1964 "Risk Aversion in the Small and in the Large", Econometrica. 32: 122–136.

Rothschild, M. & Stiglitz. J.E.

1970 "Increasing Risk I: A Definition", Journal of Economic Theory. 2: 225–243.

Sandmo A.

1969 "Capital Risk, Consumption and Portfolio Choice", Econometrica. 37: 586–599.

1970 "The Effect of Uncertainty on Saving Decisions", Review of Economic Studies. 37: 353–360.

Silberberg, E.

1978 The Structure of Economics. New York: Mc Graw–Hill

Stull, W. J.

1973 A Note on Residential Bid Price Curves", Journal of Regional Science. 13: 107–113.

Varian, Hal R.

1984 Microeconomic Analysis. New York, London: W. W. Norton & Company.

Webber, M.J.

1972 Impact of Uncertainty on Location. M. I. T. Press.