

學術論著

購租屋決策分析—實質選擇權的應用

Applying the Concept of Real Option to the Household Decision Making of Tenure Selection

林左裕* 曾建智**

Tsoyu Calvin Lin*, Chien-Chih Tseng**

摘 要

本研究將實質選擇權的觀念應用到家計單位的購屋決策上，指出當未來的房價為不確定狀況，且租屋市場的存在同樣能滿足其住屋需求下，家計單位在考慮是否進行購屋決策時，其背後隱含一何時(timing)購屋的機會選擇，為一個遞延決策選擇權(defer option)的概念價值，並利用二項式選擇權評價模式(binomial option pricing model)，實際推導此一選擇權的價值。使用本研究的模型架構進行分析，可以清楚的由數據進行投資決策之判斷，有助於家計單位正確評估購租屋決策。結果指出，當未來房價的波動性較大時，此一選擇權價值上升；當個人資金必要報酬率提高，會使得選擇權價值下降；當租金水準提高時，選擇權的價值亦提高。

關鍵詞：實質選擇權，二項式選擇權評價模式，購租屋決策

ABSTRACT

This study applies the concept of real option to the household decision making of tenure selection. As the house price in the future remains uncertainty, tenure selection is like a timing option to buy a house. This study does not only indicate that this option is an American put option, but also derive the value of the put option through binomial option pricing model. On the one hand, if the household selects to pay the rent for one period instead of buying a house, the expenditure may be reimbursed due to the decrease of house price. On the other, the expenditure may rise due to the increase of house price. This study offers a useful model for household to determine whether it is a right decision to buy or rent a house. The result shows that the more volatile the house price, the higher the option value; the higher the ratio of equity to house price, the lower the option value.

Keywords: Real Option, Binomial Option Pricing Model, Tenure Selection

(本文於2002年4月8日收稿，2003年3月5日審查通過，實際出刊日期2003年12月)

* 國立台中技術學院財政稅務系副教授 (E-mail: calvinlin@ntit.edu.tw)，Associate Professor, Department of Public Finance and Taxation, National Taichung Institute of Technology, Taichung, Taiwan, Republic of China.

** 寶來證券資本市場部襄理，朝陽科技大學財務金融研究所碩士，Assistant Manager, Department of Capital Markets, Polaris Securities Group, Taipei, Taiwan, Republic of China.

作者感謝匿名審查者十分有助益的指正。

一、緒論

(一) 研究動機與目的

在華人的觀念裡有土斯有財，能購置一間屬於自己的房屋，是個人一生中富有極大意義且重要的財務決策，當家計單位累積一定財富後，即面臨是否要購置自用住宅之選擇。台灣在民國七十年代後期，因為經濟的快速成長，資本迅速累積，以及股票市場的活絡等因素影響下，房地產市場價格持續不斷的攀升，當時購置不動產，不論自住或投資，多可獲得相當可觀的報酬。但在近十年來，房地產的投資已經隱含極高的風險及機會成本。而目前社會大眾普遍認為房價水準過高，購置家用住宅所需付出的投資成本佔家計單位所得的比例很大，且投資報酬率已不如以往可觀。易言之，若以財務投資的觀點，將同樣數目的錢用來購置房地產或者是投資於風險相當的其他金融工具，購置住宅所隱含的報酬相對較小。但是台灣地狹人稠，大眾又深信房價長期而言，應該會是一個上揚趨勢，因此家計單位在決定是否購置自用住宅時，即面臨一個極重要的關鍵—投資的時點(timing)是否恰當的問題。

然而，通常評估一購屋或租屋決策時，財務理論中資本預算投資案的方法，如淨現值(NPV)法等，為最普遍被認同的分析方法。即給定目前的房價、租金與利率水準等確定性因子進行損益之計算，但是傳統NPV法為一靜態(static)的評估方法，並未考慮未來的不確定性會使投資決策產生彈性(flexibilities)與機會(opportunities) (Dixit and Pindyck, 1995)。因此傳統NPV法並未考慮任何內含選擇權的投資淨現值。一般而言，家計單位選擇購置或承租所使用的房屋，主要差別在於購置者比承租者多了一個“投資”機會，亦即購置者投資其所使用的不動產，購置是否優於租賃？此決策端視家計單位是否有其他更好的資金使用機會而定，當購置所隱含的投資報酬率大於資金使用機會，即為購屋時機。傳統的NPV評估法則將未來的可能況狀，經合理的預期轉成期望現值，且認為唯有在 $NPV > 0$ 的狀況下才值得投資，否則即應放棄此一投資，此概念在靜態的決策下是合理的，但當家計單位得以藉租屋替代購屋，同樣能滿足其住屋需求時，家計單位似乎隱含藉給付一期的租金握有一個「機會」和「投資彈性」，讓家計單位在未來的一期內獲得更多的資訊，以增加投資的利基，這個隱含的選擇價值是傳統的NPV法所缺乏的。

實質選擇權的概念最早是由Myers(1977)提出，他指出一個投資案所產生的利潤，乃來自於目前對其擁有資產的使用，再加上一個對未來投資機會的選擇，即隱含投資者握有一個選擇權，在未來可以一定的價格取得或出售一項實質資產或投資計畫。此價值在傳統的資本預算評估方法中是被忽略的，近年來已有許多實例將選擇權的概念引進實質資產的投資評估中，應用領域極廣，如石油的開採、大型投資開發案、企業R&D的投資、不動產土地開發案、創投的投資與企業購併案的評估等。而在家計單位購屋決策的應用上，購屋預付的訂金即可視為買權的權利金，當未來房價上漲時，此訂金所賦予的購買權利將使購屋者獲利；而若房價下跌，購屋者仍可採行不購買而放棄訂金，此時其損失額度僅為有限的訂金，因此在未來房價變動不確定的情況下，此訂金即賦予購屋者「獲利無限，損失有限」的選擇空間。本研究之目的即在探究不確定性的狀況下，引入實質選擇權(real option)理論中遞延選擇權(defer option)的概念，解釋家計單位應如何考慮不確定的變動因素，在購置自用住宅或暫且租屋的兩種方案下，選擇一個較有利的決策。

(二) 研究限制

本研究並不考慮不動產市場中外部成本與外部利益所產生的經濟損失與福利，也暫未將投資者心理層面所獲得的個人滿足感與偏好納入模型中，重點並不在建立房屋交易市場的供需一般均衡模式，而是將租金水準與房價波動性、房價長期成長率等因素列為外生變數，探討在局部均衡下，在房屋需求者的立場下引入遞延選擇權的概念，以二項式選擇權評價模式進行在「短期間」家計單位是否應該購入住宅之分析，或是應先選擇租屋，俟新的房價變動資訊出現後再決策；並指出此選擇權的價值為美式賣權，以及藉具體的數據表現選擇等待的價值為何。

為了簡化分析，本文做了下列幾點假設：

1. 房價波動符合幾何布朗運動 (geometric Brownian motion)；
2. 房價波動性在研究期間並不會變動；
3. 暫不考慮不動產交易所產生的稅賦問題；
4. 暫不考慮因為利率波動對模型的影響；
5. 暫不考慮交易成本；以及
6. 借貸利率相同且為無風險利率。

在這些限制條件下，本文試圖推導出一個內含選擇權的評價模型，提供家計單位在面對是否購屋或租屋決策時的考量依據。

(三) 研究架構

本文首先介紹實質選擇權應用在購屋決策上的相關文獻；其次進行理論模型的推導，簡介選擇權理論及二項式選擇權評價模式，再將遞延決策選擇權導入購屋投資決策模型中，建構出由本研究推導求得的二項式購屋決策遞延選擇權模型；其次進行模擬數值分析，解釋內含選擇權價值及應用，並藉敏感性分析以得更充分的訊息；最後是結論與建議。

二、實質選擇權的類型及相關文獻探討

投資住宅不是只要選擇經濟繁榮的地方即可以輕易獲利，在經濟繁榮的地區常因房價已經過高，在錯誤的時點投資者反而會蒙受損失。近年來台灣的房價也呈現上漲過度而衰退的現象，因此投資住宅不只要注意地點(location)的考量，更重要的是投資的時點(timing)。然而使用淨現值(NPV)法並未考慮投資時點的問題，因為若計算出的 $NPV < 0$ ，此一投資方案將永遠被放棄，而 $NPV > 0$ 的方案則一定值得投資。然此結論是否一定正確呢？以下將介紹的實質選擇權，將有助於瞭解選擇權概念應用於資本預算之評估。

(一) 實質選擇權的類型

依照決策者執行權利的型態，實質選擇權可分為等待選擇權、改變營業規模選擇權、轉換選擇權、放棄選擇權、分期投資選擇權以及多重選擇權等，茲簡單說明如下：

1. 等待(延遲)選擇權(options to defer、options to wait或timing option)

意義：面對一項投資計劃時決策者可以等待若干年，僅在產出價格與生產成本比達到某一值(大於1)時，才會提前執行投資開發否則便採取延遲投資，直到租約屆滿權力消失。其數學式如下：

$$E_0 = \text{Max}(V - I_1, 0)$$

其中 E_0 ：等待機會價值。

V ：投資計畫價值。

I_1 ：計畫延遲一期的執行價格(即指投入成本)。

2. 改變營業規模選擇權(options to alter operating scale)：此類實質選擇權可歸納有五種，成長選擇權(growth options)、擴張選擇權(options to expand)、緊縮選擇權(options to contract)、中止選擇權(options to shut down)、重新開始選擇權(options to restart)。

意義：企業銷售或開採成功在市場上的反應比預期情況好時，會使用擴張選擇權來改變營運規模，以爭取商機；相反的，若市場景氣衰退比預期嚴重時，會採取緊縮選擇權，改變營業規模；或暫時採取中止選擇權，暫時停止營業，並等待時機，準備重新開始選擇權再投入開發或生產。其數學式如下：

$$E = \text{Max}(XV - IE, 0)$$

其中 E ：改變營業規模機會價值。

X ：選擇 $X\%$ 變數，此為規模變數。

(當 $X\% > 1$ 為擴充、 $X\% = 1$ 為維持或 $X\% < 1$ 為緊縮)

V ：投資計畫價值。

IE ：增額資本支出。

3. 轉換選擇權(options to switch)

意義：營業商品的價值或需求改變，決策者可藉由資本設備的混和改變產出(產品彈性)或是相同的產出可用不同型態的輸入來生產(製程彈性)。其數學式如下：

$$E = \text{Max}(S - V, 0)$$

其中 E ：轉換機會價值。

V ：原投資計畫價值。

S ：轉換使用(或放棄以取得殘值 S)價值。

4. 放棄選擇權(options to abandon)

意義：有些投資計畫是以階段性的方式投入資本，此類型的投資機會便創造了一個可以放棄投資的選擇權，當下個階段非常不利營業時，決策者將會放棄下一期的投資。其數學式如下：

$$E = \text{Max}(A - V, 0)$$

其中 E ：放棄機會價值。

A ：最佳替代方案價值。

V ：原投資計畫價值。

5. 分期投資選擇權(build options或time to build options)

意義：企業的投資計畫均具有階段性，因此每期的投資將有一個選擇權，實質資產價值為其後續階段投資所產生的價值。其數學式如下：

$$E = \text{Max}(V^*K - V, 0)$$

其中 E ：分期投資機會的價值。

V^* ：下一期投資計畫價值。

V ：當期投資計畫價值。

K ：下一期尚未投入的成本。

6. 多重選擇權(multiple interacting options)

意義：多重實質選擇權就是各種單一選擇權的應用組合，在實際執行投資計畫時，經常投資計畫本身便包含多個選擇權彼此多重交互影響整個投資計畫進行。

(二) 實質選擇權相關文獻探討

應用實質選擇權於投資決策的相關研究相當多，Trigeorgis(1991)以多重實質選擇權的觀點，討論投資計畫在包含多種選擇權時，由於各種選擇權的組合會產生交互作用的影響，其結果多數為負向關係，因此投資計畫內各項選擇權組合的總價值並不等於各項選擇權價值加總；但是整體而言，實質選擇權對投資計畫價值仍然呈現正向關係。後來Trigeorgis(1993)又指出分期選擇權的存在可增加前一期選擇權的實質資產價值，而前一期實質選擇權的執行可能改變當期的實質資產價值。

而Pindyck(1991)指出傳統投資理論之所以無法給予實際的投資行為適切的說明，主要是因為忽略了投資計畫的幾個特徵：

1. 投資具有部分、甚至完全不可逆(irreversible)的特性。即若現在進行投資，即使將來出現較差的狀況，也無法完全回收投資(disinvestments)。
2. 投資環境是不確定的，故下一期利潤可能上升或下降，且不確定性越大，表示上升或下降的幅度越大。
3. 投資計畫的執行是可以延遲的，亦即廠商可以等待更多資訊進入後，再決定是否進行投資。

在這三種情況同時具備下，廠商執行一投資計畫的機會成本如同失去一選擇權。因為當廠商決定要進行該項投資時，即表示廠商放棄等待新訊息進入的機會，而該項訊息可能會讓投資報酬上升，但也可能表示投資報酬不如原先預期。但無論如何一旦進行投資即無法完全抽身，因此執行一投資計畫所喪失的選擇價值也是投資成本的一部份，這是傳統投資評估理論所忽略的。

因此，Ross(1995)提出從選擇權應用於投資分析的觀點，其內涵價值(intrinsic value)皆取決於投資計畫價值與投資計畫總成本的差異， $NPV > 0$ 的投資計畫僅表示此計畫正處於價內點(in the money)有利可圖；反之， $NPV < 0$ 的投資計畫就修正後模式而言，因為加入選擇權的價值，可能使修正後淨現值大於零，即表該專案可能僅不適合於「目前」進行投資，並非表示即刻應予放棄；若依據傳統的NPV法則而言，其特性為對於 $NPV < 0$ 的投資計畫，一律拒絕，因而此法將可拒絕應被拒絕的計畫，卻同時也拒絕了「可能可以接受」的計畫，且當計畫一旦被拒絕，將永遠不會被考慮。

Ross又在1998年應用實質選擇權的概念於澳洲墨爾本評估收費公路之建設，其研究採用了蒙地卡羅(Monte Carlo)方法模擬風險因子，結果發現該選擇權之價值約佔該投資證券價值的一半以上。張大成與賴景昌(2000)則求算出台灣高鐵興建及營運過程中的放棄價值，其研究指出在「高鐵興建合約草案」中，政府「應」強制收買的義務，賦予了特許公司一「美式賣權」，但卻無任何權利金的要求，此放棄選擇權(即賣權)之價值經其估算約為633億，且此放棄價值隨著高鐵價值的降低及其波動程度的增大而上升。Kulatilaka and Wang (1996)也應用實質選擇權進行基礎投資計畫的評估，其模擬結果顯示利用實質選擇權在計畫評估上優於傳統的現金流量折現法，其修正後的淨現值顯著大於傳統的淨現值，且可有效地降低投資計畫的風險。

Luehrman(1998)指出實質選擇權與NPV法的差異來自對投資案的彈性觀點，一個投資案有遞延決策的可能性，而遞延的決策彈性帶來兩種價值：

1. 貨幣的時間價值(time value of money)：遞延決策可避免太早投入資金，而此資金可以獲取利息收入。實質選擇權模型中的執行價格以無風險利率折現表達此價值，而NPV法則不做此處理。
2. 規避風險的價值：在等待決策期間，環境可能變得對投資有利，使資產價值本身能獲取的利益變大，此將促使企業執行投資計畫；若條件變得不利投資，則企業便選擇放棄此一計畫，如此伺機而動地降低風險即產生出價值。此種因未來投資環境的不確定性(uncertainty)而產生的價值可以變異數(σ^2)表示，因為變異數可表示各種可能狀況間離差的加權平均機率，在使用選擇權模型中可充分將此一特性納入考慮，使用傳統的NPV法則無法顯示此一變異。

針對NPV法則具有上述缺點，就投資決策而言，實質選擇權與NPV法則最大的不同點，在於實質選擇權加入決策者所擁有的「管理彈性」考量。因此，原來的淨現值公式可被修正為以下所示(Trigeogis, 1993)：

擴張(Expanded) NPV = 靜態(Static)NPV + 隱含的實質選擇權價值。

上述公式中：擴張(Expanded) NPV在加入選擇權價值考量後，使得投資專案淨現值整體增加。

(三) 實質選擇權應用在購租屋決策上的相關文獻

國內外將選擇權的概念應用到購租屋決策的文獻並不多，其中Nordvik(2000)指出，當一個屋主決定要將其擁有的非自用住宅出售，若同時也考慮出租的方式，則屋主在每期決策時有兩種選擇的方式：當期出售房屋，或將房屋在當期出租，並等待至下一期再決定。此時若引進動態隨機的架構來探討此一決策，可以將出租的決定視為一個含有選擇權價值的決策，亦即屋主可以遞延出售房屋所產生的價值。售屋決策是一個不可逆的決策，若在當期就出售房屋，即消滅遞延決策選擇權的價值；若延後一期等待新資訊再決策，其內含的選擇權即有價值，研究中指出若考慮此一價值，將會降低屋主要求的租金水準，此一租金水準甚至會低於屋主的使用成本，這也間接證明出遞延選擇權價值的存在。國內房屋的出租租金投資報酬率甚低，可能因投資房屋的屋主主要著眼於房屋出售的資本利得，而非租金收入。因此收取較少的租金而進行養屋或養地，等待房價市場大幅上漲時再出售房屋賺取價差利潤，也因此等待的價值實際存在於房屋的投資決策中，且不應忽視。

國內張大成(1996)將實質選擇權應用在動態經濟下最適購屋法則，他指出傳統上使用確定性模型來探討消費者的購屋決策，但欲分析一個不確定性狀態下的購屋決策時該準則即不適用。文中設立一隨機模型，應用實質選擇權理論，並考慮無套利條件下進行此一問題之分析，事實上，上述的購屋決策如同消費者手上握有一個美式選擇權(American option)，購屋者心中的保留價格(reservation price)即為此一選擇權的執行價格(exercise price)，購屋者在決定是否購屋自住時，心中存在一保留價格，如果當期房價低於其保留價格則會購屋自住；反之，若房價高於保留價格，則將繼續租屋等待未來可能有較低房價出現的機會(註1)。結果發現，當房租支出或預期未來房價成長率提高時，將提高購屋者的最適保留價格，進而使得購屋機率上升；當房價波動性增大時，將會造成最適保留價格的下降，進而降低購屋機率；而無風險利率的變動，對購屋決策的影響效果則不確定。

由上述的兩篇文獻中可得知，無論從房屋持有者的售屋決策中，或者從消費者的購屋決策中，可以發現因為租屋市場的存在，讓雙方在買與賣中多了一個選擇——「租」，自出租與租屋所衍生的遞延決策選擇權價值，在房地產市場過熱時期有止緩的效果，因為房屋持有者要求的租金水準會遠低於房屋價格之每期持有成本，而使欲購屋者暫緩購入高價的房屋而選擇先租屋觀察房價未來的變化；反之，當房地產景氣過度低迷時，房屋持有者對租金收入佔投資報酬比例將相對提高，此即使得欲購屋者覺得租金支出比重相對於購屋升高，因而傾向選擇購屋而不租屋，也因此而活絡房屋市場。

三、模型推導

(一) 選擇權定價理論之簡介

選擇權的定價理論發展已行之有年，自從Black及Scholes(1973)提出歐式股票選擇權定價模型後，奠定了選擇權評價模式的理論基礎。該模型假設股價的瞬間變動符合幾何布朗運動：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

其中 μ 與 σ 分別為標的物S的預期成長率與波動性， dz 為微小時間變動 dt 為標準的Wiener process，符合平均數為0、標準差為 \sqrt{dt} 之常態分配

然而利用B-S公式進行實質選擇權評價時，常會因為無法順利求解出偏微分方程而找不到封閉的公式解(closed-form solution)的情形，因而可能產生理論上可行但卻無法應用的狀況，因此實務上常使用數值分析法(numerical analysis approach)以逼近欲求解之值，以下將介紹的二項式選擇權評價模型(binomial option pricing model)，即為最常用的數值分析法的一種，二項式模型可以在不用推導複雜的隨機微分方程下，計算出符合B-S模型假設下的選擇權價值的逼近值。

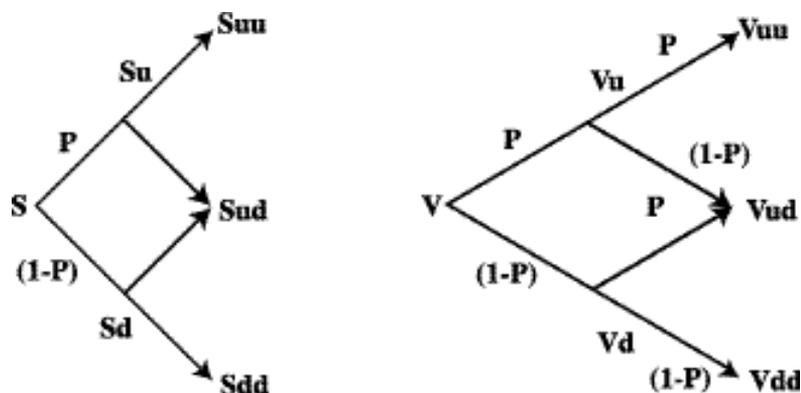
Cox et al.(1979)發表二項式選擇權評價模式，為選擇權的評價提供了一個更簡易且適用彈性較廣的方式，此種模式相較於Black-Scholes評價模式可輕易的使用簡單的數學式，即可明瞭其背後的經濟含意。基本上，B-S評價模型為時間連續型的評價模式，而二項式模型可視為離散型的模式，此外B-S評價模型僅適用於歐式選擇權的評價，其假設標的物價格需服從對數常態分配(lognormal distribution)，然而現實中許多的資產的價格並不一定會完全服從對數常態分配，使用二項式選擇權模型並無上述的限制，且當二項式評價模型的權利期間被切割得夠細時，二項式評價模型的值將會趨近於B-S評價模型所求算的值。

二項式評價模式的理論架構基於風險中立(risk neutral)評價原理，此種方法在性質上類似多期的確定等值(certainty equivalence)折現模式，即先將風險規避下的各期現金流量，經由確定等值因子轉換為風險中立狀況下的現金流量，再以無風險利率折現求得現值。此種方法除了能較完整的納入投資計畫未來可能面臨的不確定性外，應用上因使用較多的市場公開資訊，避免過多的主觀判斷，使得評估的結果更具客觀與合理性，並能解決傳統NPV法的缺失，因此在不用艱深的數學理論推導，又能免除一些假設限制下，本文擬採用二項式選擇權評價模式，進行實質選擇權價值之推導。

(二) 兩期二項式賣權的介紹

二項式評價模型藉由求出最終股價，然後求出最終選擇權價格，再透過往前推算 (back

forward)的方式，推出二項式評價模型前一期(T - 1)選擇權價格，再透過相同的程序，求出往前一期的價格(T - 2)，如此重複最後得出選擇權的最初價格。



在兩期模型中，股價在第二期有上漲兩次的SuU，上漲一次及下跌一次的Sud及下跌兩次的Sdd，其對應的賣權價值分別為VuU、Vud及Vdd。

其中：

P為風險中立下，標的資產未來一期上漲的機率
而賣權兩期模型公式則可表示如下：

$$V = \frac{1}{1+r} [P \cdot V_u + (1-P) \cdot V_d]$$

當期數為多期時，二項式賣權的一般式為：

$$V = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P^j (1-P)^{n-j} \max(S_u^j S_d^{n-j} - K, 0)$$

K=執行價格

其中n為分割期數，m為要使賣權處於價內的最小跌價次數，即至少需下跌幾次才能使賣權處於價內。因此根據上述公式便可很快求出賣權的價值，不需要逐期折現，亦即不需要處理中間的節點，且凡是價外的值即可不必計算，只需計算價內賣權。當n越大時，二項式的值會越接近B-S的理論值。

此外對於每期上升幅度u與下降幅度d的決定，Cox et al.(1979)亦證明出，在風險中立的假設下在二項式評價模型中可決定出：

$$u = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad d = e^{-(r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

其中 σ ：標的資產波動性
 t ：單位時間 r ：無風險利率

在此賣權評價模式中，並未包含原來標的資產的實際上漲機率 g ，因此標的資產實際上漲或下跌的可能機率並不會影響選擇權價格的求算，只要知道資產未來可能的波動價格即可。而在上式中 P 可視為在風險中立的假設下(risk-neutral)賣權可能上漲的機率，風險中立評價是一項很有用的工具，此乃由於在一風險中立的世界裡，有兩項重要的結論應以成立：其一為所有證券的預期報酬率為無風險利率，其二為此一無風險利率適用於未來任何現金流量的折現率。因此賣權價值的求算，便是由未來可能的價值 V_u 及 V_d ，乘以風險中立下的機率，再以無風險利率折算現值而得。

(三) 選擇權概念在購屋決策中的應用—遞延決策選擇權模型的推導

假設家計單位可以先付出一期的租金 CF_i ，取得住屋的滿足，而在未來的一期內，可以等待對自己有利的機會，再決定是否以購屋取代租屋，以滿足其住屋的需求，家計單位的購屋決策，因為隱含了此一權利，故以傳統NPV求算出的淨現值，若為負值處於價外(out of money)，不適合立刻執行購屋決策，但只要投資可遞延，便還有時間等待價值。以下本研究就此一概念，試圖推導出含有遞延選擇權的投資價值。

首先考慮以傳統資本評價模型(NPV法)進行購屋決策損益的計算：



若考慮未來不確定性修正後NPV(將投資時點一般化)如下圖所示：



(1) (2) (3)

其中 NPV_0 為目前(第0期)投資價值
 NPV_t 為目前(第 t 期)投資價值
 $E(S_n)$ 為預期未來到期時的房屋期末價值
 $E_t(S_n)$ 為預期在 t 時點時的房屋期末價值
 S_0 為期初房屋價格
 S_t 為第 t 期時房屋價格
 CF_t 為第 t 期之租金支出(期初支付)
 k 為個人必要報酬率

若將(1) + (2)視為在選擇權模型中的執行價格 $E(X)$ ，而將(3)視為標的資產的價格 S ，則傳統NPV法求算出的值就如同在一個賣權下，某個時點 t 的選擇權內在價值(intrinsic value)，即 $V_t = \text{Max}(E(X_t) - S_t, 0)$ ，未來房價的不確定性與時間價值並未納入考量。因此，在考慮購屋決策之可遞延性，及未來房價的不確定性與投資的不可逆即決定購屋後選擇權的價值便消失，即可導入一個二期或多期的選擇權模型進行決策分析，茲說明如下。

在 $T=0$ 期時，購屋的成本為 S_0 ，而總收益為 $E(X_0)$ ，包括因購屋而能節省未來 n 期的租金支出之淨現值與購屋後持有房屋直到期末價值的淨現值。若當期無法做出決策則考慮支付 CF_0 等待一期再進行決策，未來的購屋成本可能為 S_u 或 S_d ，而可能的總收益則為 $E(X_u)$ 或 $E(X_d)$ ，故未來賣

權的價值有P的機率為 $V_u = \text{Max}(E(X_u) - S_u, 0)$ ，有 $1-P$ 的機率是 $V_d = \text{Max}(E(X_d) - S_d, 0)$ ，故在 $T=1$ 期時點，購屋決策的期望價值為 $P \cdot V_u + (1-P) \cdot V_d$ ，若在 $T=1$ 時不執行購屋決策，則需考慮再付出一期租金 CF_1 ，以取得等待到 $T=2$ 期的權利，而是否值得再等待一期，則需看到 $T=2$ 期時，將在當期賣權可能的價值折現回到 $T=1$ ，再與 $T=1$ 即進行購屋之價值做比較，若因為等待而產生的選擇權價值較大，則即使在第 $T=1$ 時的投資價值為正，也不應該在 $T=1$ 時就進行購屋而應繼續等待；同理，即可由第 $T=2$ 期，推演到第 $T=3$ 期，一直到第 n 期，如圖一所示。

其中：

$$V = \text{Max} \begin{cases} \text{[Grey Box]} \{P \cdot V_u + (1-P) \cdot V_d\} \text{ (繼續等待之價值)} \\ \text{或} \\ E(X_0) - S_0 \text{ (提前執行選擇權的價值)} \end{cases}$$

$$V_u = \text{Max} \begin{cases} \text{[Grey Box]} \{P \cdot V_{uu} + (1-P) \cdot V_{ud}\} \text{ (繼續等待之價值)} \\ \text{或} \\ E(X_u) - S_u \text{ (提前執行選擇權的價值)} \end{cases}$$

其他結點狀況類推，不再贅述。

其中： V ：在 $T=0$ 時點，擴張NPV的價值(註2)

S_0 ：在 $T=0$ 時點，購屋的價格

$E(X_0)$ ：在 $T=0$ 時點，購屋的總收益

V_u ：在標的資產未來一期為上漲的情況下， $T=1$ 時點選擇權的價值

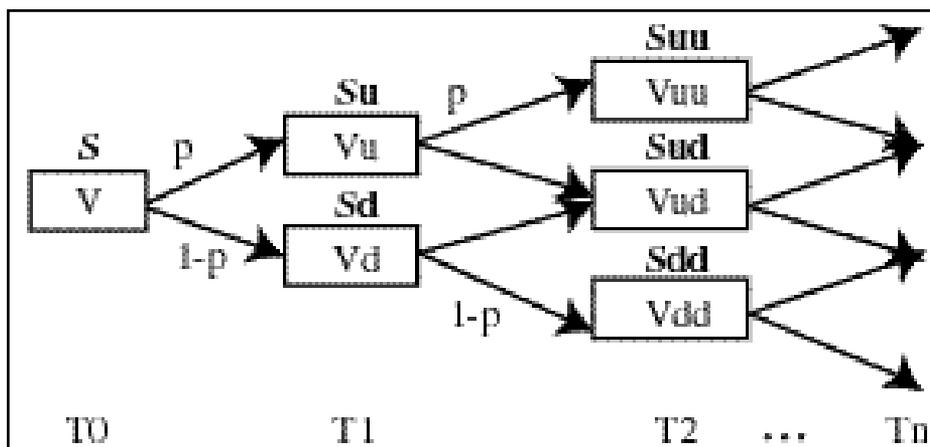
V_d ：在標的資產未來一期為下跌的情況下， $T=1$ 時點選擇權的價值

S_u ：未來一期為上漲的情況下， $T=1$ 期標的資產的價格

S_d ：未來一期為下跌的情況下， $T=1$ 期標的資產的價格

$E(X_u)$ ：在標的資產未來一期為上漲的情況下， $T=1$ 期購屋的總收益

$E(X_d)$ ：在標的資產未來一期為下跌的情況下， $T=1$ 期購屋的總收益



圖一 二項式評價模型推導圖

- P：風險中立下，標的資產未來一期上漲的機率
 1-P：風險中立下，標的資產未來一期下跌的機率
 r：無風險利率
 Δ ：單位時間變動

茲對其中的當期購屋利潤 $E(X_t)$ 進行說明。在使用二項式評價模型時，可將其視為在風險中立下進行評估，其中P為風險中立下標的資產未來可能上漲的機率，而求出之價值便以無風險利率r折算。然而在模型中的當期購屋利潤，包含對未來可能節省的租金支出及到期時出售房屋可以獲得的資本利得，這些在未來期望獲得的利益是在風險規避情況下之預期，這些價值的當期淨現值乃以風險補償的必要報酬率折現，並不能直接納入以風險中立假設下的二項式方格中求算，而Hull (1997)指出，一般而言，任何或有求償資產(contingent claim on an asset)，無論是否具交易市場，都可以被定價在一個有系統風險的世界下，將真實的成長率以一個確定等值因子減去風險溢酬，此行為即如同在風險中立假設下之定價一樣。此即類似以無風險利率折算確定等值現金流量，而非以風險調整過後的報酬率折算實際的預期現金流量。因此在本文中採用確定等值因子(certainty equivalence)折算出在風險中立下的對等現金流量，再求算出符合二項式評價模型的 $E(X_t)$ 價值。

此外，論及遞延投資期的長度是否需要一定，本研究認為，使用二項式選擇權評價模式，需要估計標的資產的波動度，而此值通常是由歷史的波動度估算作為未來資產的波動狀況，此估算值是否合理？一般而言，只要選擇權的期間不長、沒有重大的事件發生，即是可以被接受的值，而在本文中，模型假設標的資產歷史房價的波動程度，便是未來房價波動度的估計值，當我們求算的遞延決策期過長時，即應考慮波動度是否已隨著時間改變，雖然已經有許多的學者指出選擇權的評價模型存在此一問題，並提出許多的計量模型試圖解決此一問題(Hull, 1997)，但本研究並不打算採用這些複雜的模型估算波動度，而擬讓遞延決策的期間落在一個合理的範圍，例如只估算一年的遞延決策期，儘量不讓波動程度可能的改變對決策造成重大的影響。

(四) 模型變數影響

在模型推導的架構大致確立下，以下探討幾個重要的變數對模型的可能影響狀況。

1. 租金水準(R)

當市場上的租金水準較高時，代表以租屋來滿足住屋需求的成本較高，也同時反映以購屋來替代租屋能節省的成本提高，因此，經由模型所求算出來的Expanded NPV的值應該會較大，代表投資人較有可能以購屋來取代租屋；而當租金水準低時情況恰好相反，租屋的成本低，投資人反而會持續租屋而不購屋。

2. 房價波動程度()

當市場上房價波動程度較大時，代表未來房價會下跌到合理購買價格的機會較大，程度也可能較深，因此，經模型所算出的Expanded NPV值便會較大，這代表未來投資人很有機會會遇到購屋的好時點；反之，當波動程度較低時，而傳統Static NPV的值又是負的情況下，要達到購屋的有利機會便會相當小，甚至沒有，Expanded NPV就很有可能趨近於零，此時租屋便是最好的選擇。

3. 個人資金必要報酬率(k)

個人資金必要報酬率代表投資人的資金所隱含的必要報酬，以購屋的決策而言，當投資人完全以自有資金來購買房屋時，隱含這個計畫必須以自有資金成本求算損益，但一般而言家計單位的購屋決策所需資金，通常有一大部分例如六成或更多)來自於銀行貸款，而房貸所要求的融資成本，通常會低於個人必要報酬率，而當個人必要報酬率較小時，會使得Expanded NPV的值變大，但值得注意的是若因為必要報酬率變小，而使得Static NPV由負轉正，在某些情況下，就應該要立刻進行投資而無需等待。

4. 房價的成長率(u)與目前房價的水準(S)

未來房價的成長率，代表購屋所帶來房子本身增值空間，相對於目前的房價水準，即可反應出房價的成長率。易言之，當未來房價的成長率預期較高，且目前的房價水準偏低時，表投資人應購入房屋；相對地，當預期房價未來的成長率不高，而目前的房價又偏高時($NPV < 0$)，表目前不適合購入房屋，應該要以租屋為宜。

四、模擬實證

(一) 應用數據說明

因台灣房地產交易實際資訊較不易取得，而擁有較完整房地產交易資料者，如大型建商或房屋仲介商之資訊多屬個案資料，因此本研究以模擬資料進行分析評估，並不會影響研究最終之結論，國內已由官方主導成立房地產資料中心，未來若能收集到實際的資料，即可直接套用本模式驗證。

經先前的理論推演，以下本研究將以一組模擬的數據說明評價模型的特性(註3)。倘若目前在市場上有一棟房屋出售，市價為1,000萬元，結構體尚可居住30年。若出租租金採季繳制，市場無風險利率為6%，若決定購屋，將居住30年到期後才會考慮處置房屋，而這段期間內持有房屋的維持使用成本每年約為房價的2%。則考慮是否購買此房屋的家計單位，該如何評估此一決策之損益？

1. 狀況一

每個月的租金為4萬元，而租金成長率每年為3%，若房價的長期成長率每年為8%，家計單位購屋的資金成本為10%，房價年波動性()的估計值為20%。

首先經由傳統的NPV法，可求算出若目前立刻購入此一房屋的NPV價值為-77.78萬，此投資計畫並不值得立刻執行，但如果納入實質選擇權中遞延選擇權的概念時，家計單位可以先租此房屋，等待房價的新資訊出現後，再決定是否購屋。當我們考慮一個遞延期間為一年，決策時點為每一季的選擇權時，經二項式模型的計算，可求得 Expanded NPV的價值為14.58萬(如圖二所示)，故其中隱含的實質選擇權溢酬可由下式求得：擴張(Expanded) NPV = 靜態(Static)NPV + 實質選擇權價值。實質選擇權價值即為14.58萬減(-77.78萬)等於92.36萬，從圖三可以看出在等待在第一季並未出現獲利的機會，但在第二季起到第四季，都會出現讓家計單位獲得正NPV的機會，且以等待到第四季所能獲得的選擇權價值最高，故家計單位在前述的條件狀況下，應選擇先租屋等待一年以獲得最大的利潤。

2. 狀況二

若房價長期成長率變為每年10%，而房價的波動性()只有10%，在其他條件不變下，我們再次求算其投資價值，以傳統 NPV法求算出的投資價值為28.11萬(如圖四所示)，為一值得立刻進行投資之方案，但若考慮目前投資是否為利潤最大的時點，即遞延一段時間再決策是否會讓利潤增加時，則應將遞延選擇權的價值納入考量，經由模型重新計算可以得到，等待期間一年的Expanded NPV的價值25.49萬(如圖五所示)，比傳統NPV算出來的價值為小，從圖五亦可得知等待越久，能獲得正的利潤的期望價值越小，此時內含選擇權的價值為負值 $25.49-28.11 = -2.62$ (註4)，故當房價的預期成長提高，而未來房價的波動性不大時，投資者選擇立刻進行購屋的機會便會提高而無須再等待。

3. 狀況三

當房價的波動性只有15%，租金水準降為每月3萬，在其他條件不變的情況下，經由傳統 NPV法求算而得的價值為-231.2萬，購屋即為十分不值得投資的計劃，而在考慮遞延決策選擇權的價值後，Expanded NPV的價值為0(如圖六所示)，從圖七中可看出即使先租屋等待，在遞延決策期間內的各時點，也沒有出現讓投資利潤為正的機會，此時，雖然內含選擇權的價值存在，但卻不足以讓家計單位獲利，故在未來一年內，若客觀條件沒有重大改變下，則在目前的房價水準及成長性下，購屋是完全沒有獲利機會的投資，因較低的租金水準誘使家計單位相對於目前的房價偏向選擇租屋，且由於等待並未造成有利的機會，因此家計單位應將自有資金投資於市場上能獲取相對報酬率較高的投資工具，等待客觀環境條件出現改變(例如：政府提供優惠利率房貸)，再重新評估購屋的損益。

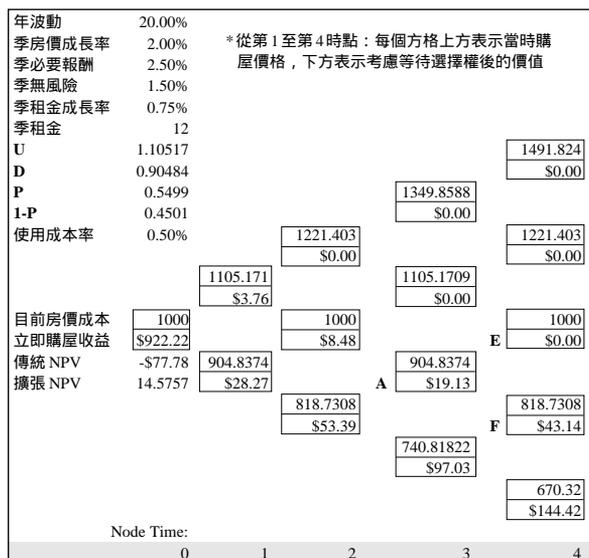
4. 狀況四

若考慮房價未來每年的波動性增加為25%，而房價預期每年成長率變為10%，與狀況二的條件相較，即為未來的波動性由10%增加到25%，在其他假設條件不變下再次計算損益，則可知道傳統NPV的價值為28.11萬，為一個值得立刻投資的方案，但所求算出含選擇權價值的Expanded NPV為58.1萬(如圖八所示)，表示等待的價值大於立刻投資，而從圖九亦可看出在第二季以後便有機會使獲利大於傳統NPV的價值，因此，雖然目前立刻投資可行，但並不表示遞延決策無法獲得更多的利潤，與狀況二相較下，因為波動性增大而使家計單位能在未來獲得更大的獲利機會，而使整體投資的利潤變大。

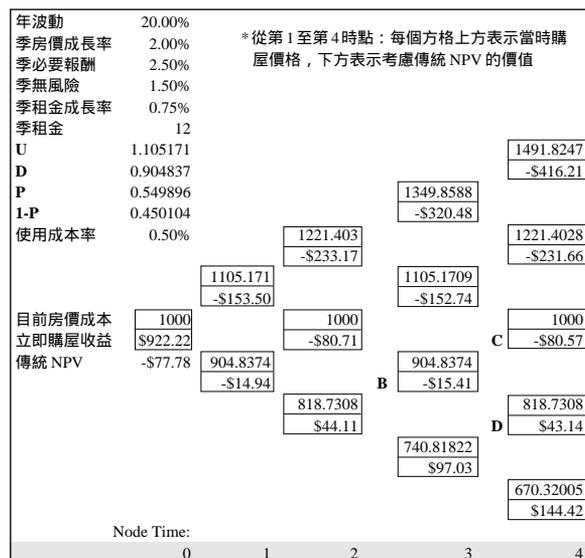
5. 小結

將上述四種不同的特定狀況整理說明，如表一所示，若房價的波動性較大、租金水準較高時，前者增加了未來房價的不確定幅度，而後者則提高了家計單位購屋的意願，即使目前的傳統 NPV所求算的價值為負也不該放棄，因為此僅代表以目前的房價水準購屋不划算，但在此情況下，「等待」之價值即變高，如第一種狀況所示；而將狀況三與狀況一進行比較，當未來房價的波動性不大，且租金水準不高時，在個人資金必要報酬率 k 的現值折算下，傳統NPV若為負值，遞延決策的選擇權價值也無法增加投資者的利潤，此現象類似股票選擇權中，選擇權的價值屬於深價外(deep out of money)，選擇權的內含價值(intrinsic value)為0，且等待的時間價值(time value)又無法在到期日前提供正價差的機會，因此短期內也只能租屋，而不考慮購屋的決

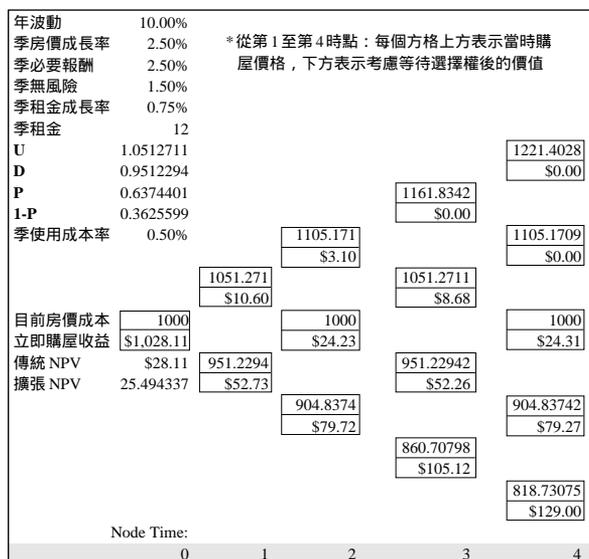
策。這也可以解釋在民國八十年代台灣的房屋交易市場，當時房價水準偏高，但市場的交易活躍性較民國七十年代後期規模為小，投資房地產的報酬率也向下修正，許多欲購置住宅的家計單位，寧願選擇租屋以滿足住屋需求，因相對於購屋而言，其支出成本較低。若目前的 Static NPV 已經是正的情況下，除非未來的房價波動性很大、成長率提高，否則家計單位不該遞延決策，應立即購屋，如狀況二與狀況四所示。



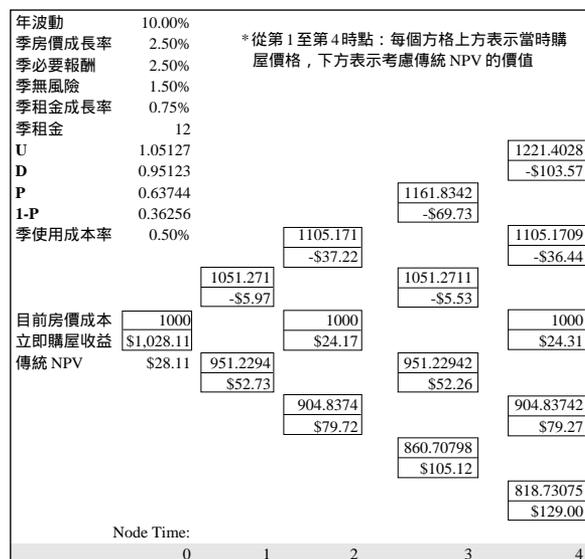
圖二 等待一年擴張NPV價值(狀況一)(註5)



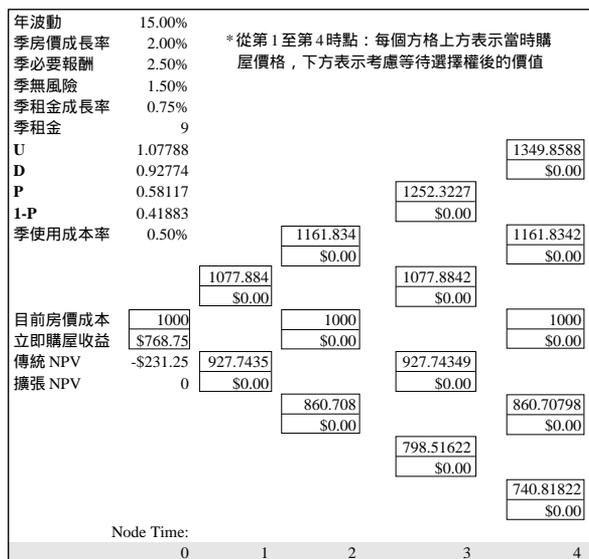
圖三 等待一年各決策時點的購屋損益狀況一)



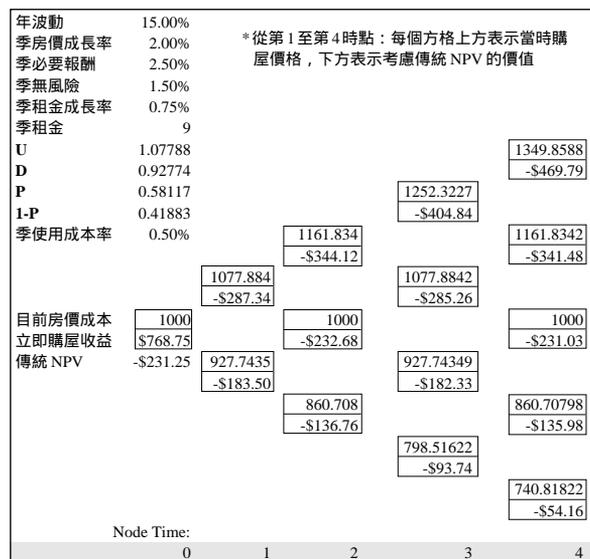
圖四 等待一年擴張NPV價值(狀況二)



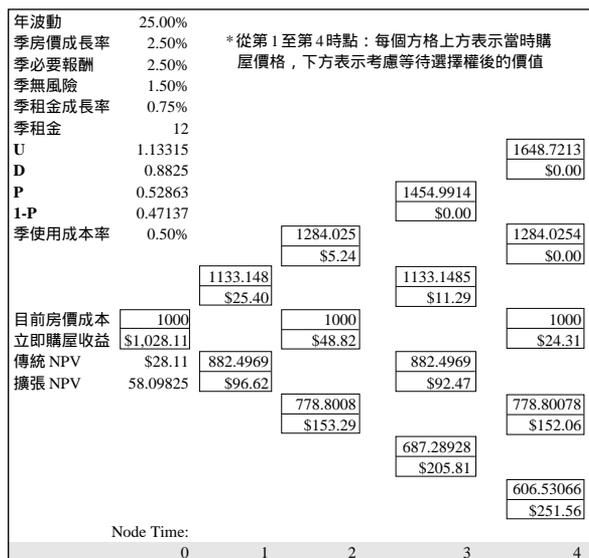
圖五 等待一年各決策時點的購屋損益狀況二)



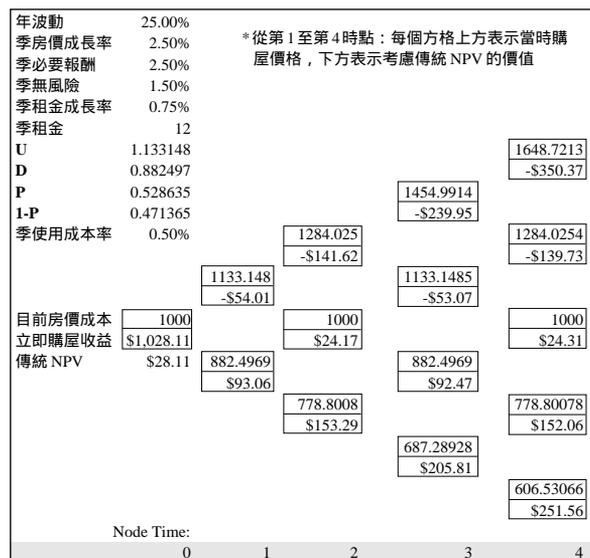
圖六 等待一年擴張NPV價值(狀況三)



圖七 等待一年各決策時點的購屋損益狀況三



圖八 等待一年擴張NPV價值(狀況四)



圖九 等待一年各決策時點的購屋損益狀況四

表一 不同狀況下，模擬數據結果彙總表

	NPV(萬)	E NPV(萬)	年波動率	季房價成長率	必要報酬率	季無風險利率	季租金(萬)
狀況一	-\$77.78	\$14.58	20.0%	2.00%	2.50%	1.50%	12
狀況二	\$28.11	\$25.49	10.0%	2.50%	2.50%	1.50%	12
狀況三	-\$231.25	\$0.00	15.0%	2.00%	2.50%	1.50%	9
狀況四	\$28.11	\$58.10	25.0%	2.50%	2.50%	1.50%	12

註：E NPV代表 擴張(Expanded)NPV

(二) 敏感性分析

1. 模型變數影響

(1) 房價波動程度()

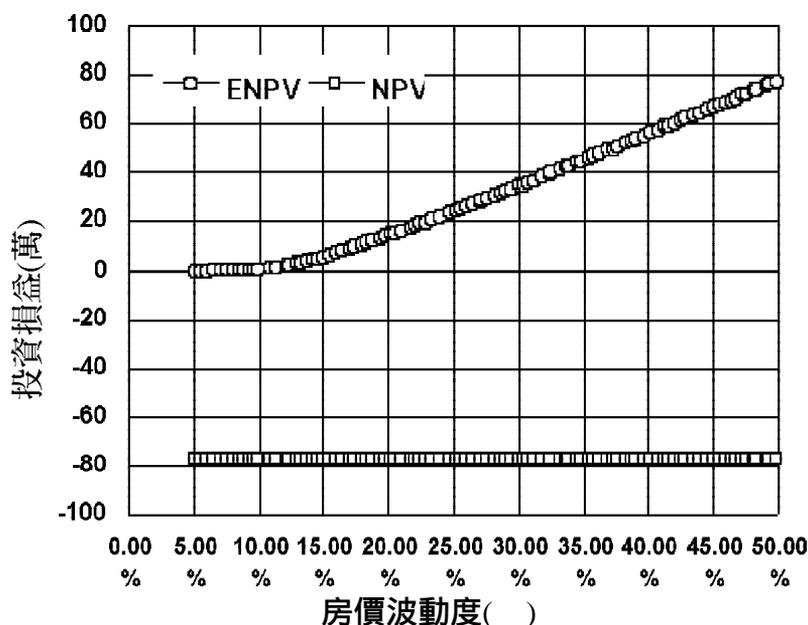
當市場上房價波動程度較大時，代表未來房價會下跌到合理購買價格的機會較大，程度也可能較深，因此，經模型所算出的Expanded NPV值便會較大，這代表未來投資人有較大的機會會遇到購屋的好時點；反之，當波動程度較低時，且傳統Static NPV的值又為負的情況下，要達到購屋的有利時機即相當小，甚至沒有，此時Expanded NPV的值會趨近於0，租屋即為最好的選擇。

由圖十中可看出當房價波動性越大，對Expanded NPV的影響是正向的，當未來的波動程度愈大時，遞延選擇權的價值即會越高，與傳統NPV所求算出的價值差距便會越大，而當波動性很小時(5%)則選擇權的價值即越趨近於零，表示未來房價不會有太大的波動，如果目前傳統NPV所求算出的價值小於零(如圖十所示)，則未來的一年內也無法經由租屋等待而出現購屋有利的機會。此外，因為在傳統的NPV計算式中，並未將未來房屋價格的不確定因素納入考量，因此房價波動度的改變並不會影響傳統NPV的值。

(2) 個人資金必要報酬率(k)

個人資金必要報酬率代表投資人的資金所隱含的必要報酬。以購屋的決策而言，當投資人完全以自有資金購買房屋時，隱含這個計畫必須以自有資金成本求算損益，但一般的家計單位購屋時所需資金，通常有相當高的比例為銀行貸款，當個人必要報酬率較小時，會使得Expanded NPV的值變大，值得注意的是，若因必要報酬率變小，而使得Static NPV由負轉正，即應立刻進行投資而無需等待。

如圖十一所示，當必要報酬率增加時，同時使得傳統 NPV 的價值與選擇權模型的價值降



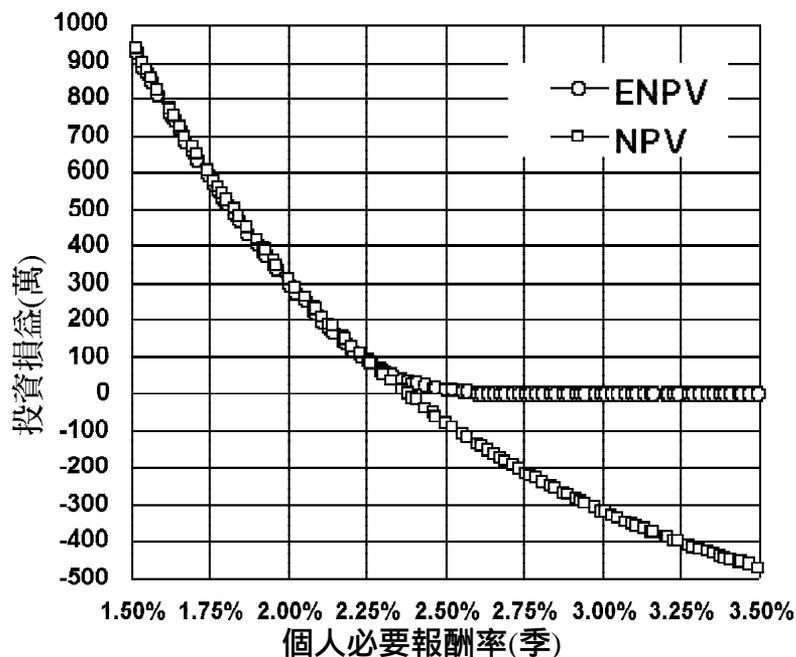
圖十 房價波動性對模型的敏感性分析(5% 50%)

低，在季必要報酬率小於(2.25%)時，可以概略看出傳統NPV的價值皆大於ENPV的價值，表示如果個人資金成本偏低，而傳統NPV的價值為正在其他條件不變下，選擇立即購屋是正確的決定。而從圖十一中也可得知，在季個人必要報酬介於(2.25% 2.75%)時，遞延決策的價值即明顯可辨，前半段雖然傳統NPV為正，但等待一年做決策所增加的價值更多，而後半段則更為明顯，立即購屋的NPV為負值，但等待一年會出現有利的投資機會而使利潤增加。因此當個人資金成本介於這個區段時，租屋等待購屋機會是值得的。若季個人資金成本大於(2.75%)時，傳統NPV為負值且遞延決策選擇權的價值也趨近於零，近期內即不必考慮是否購屋，因為短期間都不值得購買。

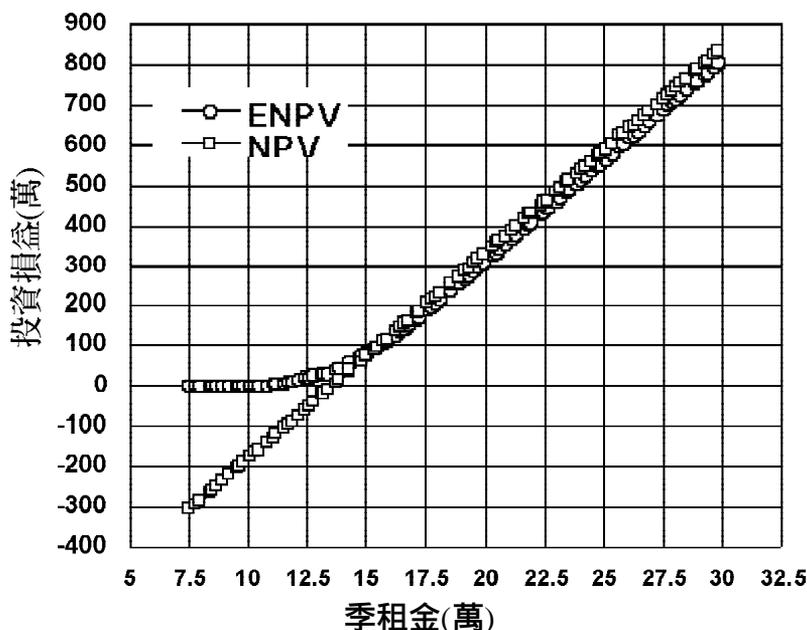
(3) 租金水準(CFi)

當市場上的租金水準過高時，代表以租屋滿足住屋需求的成本較高，同時也反應以購屋替代租屋可節省的金額提高，因此，經由模型所求算得出的Expanded NPV的值會較大，代表投資人以購屋取代租屋較為有利，而當租金水準低時，情況恰好相反，租屋的成本相對於房價偏低時，投資人反而會持續租屋而不購屋。

如圖十二所示，租金水準的高低對於購屋決策與否有著很重要的影響，當房屋租金的水準提高時，對於兩個模型的價值都有正向的影響，在目前的房價下租金水準越高，家計單位越有可能以購屋來代替租屋，而對於遞延決策選擇權而言，也代表越慢購屋機會成本會提高，雖然房價未來的不確定性，會使得選擇權的價值提升，但如果目前的傳統NPV價值為正，如圖十二中所示，當租金水準每季約高於 16 萬時，傳統 NPV 的價值便會稍高於 Expanded NPV 所求算出的價值，只有當租金介於9萬至16萬之間時(此時NPV為正)，選擇租屋等待才是較有利的決策。



圖十一 個人季資金必要報酬率對模型的敏感性分析(1.5% 3.5%)



圖十二 季租金變動對模型的敏感性分析(7.5萬 / 季 30萬 / 季)

五、結論與建議

Lurhrman(1998)以「蕃茄園的栽種」來比喻實質選擇權(A gardening metaphor option as tomatoes)。當目前所求算出的NPV為正，且未來的波動性不大，不太有變化時，則這個投資案可立即執行，就如同園中那些已經成熟的蕃茄，應可以立即採收；相對的那些NPV目前為負值，且未來變異性並不太大的投資案是不值得我們去執行的，就好像不會採收爛掉的蕃茄一般；而那些未來波動程度大，不確定程度相對高的投資案，是可以等待新訊息流入後，再來做決定，就好比那些青澀未熟的蕃茄，我們現在不會立即去採收，但可以等待未來情況明確以後才做決定。本文採二項式選擇權評價模式，應用於家計單位的購屋決策，亦在指出上述實質選擇權的精神所在，目前執行購屋決策與否，不應只考慮目前狀況，因在未來房價不確定的狀況下，家計單位在考慮是否進行購屋決策時，可藉選擇租屋取代購屋，以滿足其住屋的需求，此概念背後隱含一個何時(timing)執行購屋決策的機會選擇，是否該等待或應立即投資，透過本研究模式的設定，可讓家計單位明確明瞭等待的價值為何。本研究結果指出，當未來房價波動性較大時，此一選擇權的價值上升；當個人資金必要報酬率提高，會使得選擇權價值下降；當租金水準提高時，選擇權的價值亦提高。

當立刻投資NPV為負的情形下，考慮是否要保有購屋資金，先租屋等待未來的購屋機會，或者是近期內無須考慮是否購屋，而先將資金投資在其他的金融工具以賺取相對於投資購屋更大的報酬；而當立刻投資的NPV為正時，決策在於判斷遞延一期是否會使家計單位獲得更大的利潤，在某些狀況下，如果立刻投資的價值已經屬於深價內(deep in the money)就應該立刻投資而無須再等待，使用本研究的模型架構進行分析，可清楚地由數據判斷投資決策，對家計單位在考慮是否購屋時，能做出更正確的決策。

在本研究中以購屋者的角度求算遞延決策選擇權的價值，其中有一項假設為當家計單位決定購屋後，便會持續持有房屋直到期末，並不考慮在持有期間將房屋轉售的可能性，且不動產交易稅賦及租屋搬遷之不方便性也未納入考量，因此未來的研究方向可以往多重選擇權(multiple interacting options)的角度切入探討，並將稅賦問題及搬遷成本等納入考慮，以便得到更周詳的模型。

註 釋

- 註 1：在張大成推導之模型，關鍵變數在於購屋者心中的保留價格(reservation price)，但文中未清楚交代如何利用實際數據求得保留價格，其重點只著重於理論模型之推導，點出購屋決策在考慮不確定性因素後，會比使用傳統模型多出一個美式賣權的價值，然本文架構之模型則可以清楚的由數據來進行投資決策之判斷，有助於家計單位正確評估購租屋決策。
- 註 2：擴張(Expanded) NPV = 靜態(Static) NPV + 隱含的實質選擇權價值
- 註 3：以下使用之實證模型係採二項式選擇權評價模式，其切割期數以季為單位，決策時點也以每季期初為基準，主要考量為房價市場之資訊揭露速度及投資人反應市場資訊之速度不若股票市場，故以每季為基礎，求算其價值。
- 註 4：當美式賣權處於深價內(deep in the money)，且標的資產波動性很低時，賣權內在價值(intrinsic value)將有可能大於繼續等待的價值，而造成實質選擇權價值為負的狀況。
- 註 5：圖二方格A數據19.13之求算如下：考慮當期立刻購屋之損益(圖三之B值)與付出第4季租金，等待至年底有可能產生之期望購屋損益折現(圖三之C與D值)。公式為 $A = \max\{B, e^{-r \cdot t} [P \cdot \max\{C, 0\} + (1-P) \cdot \max\{D, 0\}], 0\}$ ，其中 $\max\{C, 0\}$ 即為E方格的值， $\max\{D, 0\}$ 即為F方格的值，其餘各點類推不再贅述。

參考文獻

張大成

1996 《隨機最適模型在經濟學上的三個應用》博士論文，國立台灣大學。

張大成，賴景昌

2000 BOT放棄價值的評估—以台灣高速鐵路為例 《管理學報》17(3)：441-460。

Black F. and M. Scholes

1973 "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81:637-659.

Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein

1979 "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7:229-263.

Dixit, A. and R. S. Pindyck

1995 "The Options Approach to Capital Investment," *Harvard Business Review*, May-June: 105-115.

Hull, J.

1997 *Options, Futures, and Other Derivatives*, 3rd Edition, New Jersey: Prentice Hall.

Kulatilaka, N. and G. Wang

1996 "Real Option Framework for Evaluating Infrastructure Investment," *Journal of Financial Studies*, 4(2):1-19.

Luehrman, T.A.

1998 "Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers," *Harvard Business Review*, Boston, Jul/Aug:102-116

Myers, S.C.

1977 "Determinants of Corporate Borrowing," *Journal of Financial Economics*, 5(2):147-176.

Nordvik, V.

2000 "Tenure Flexibility and The Supply of Private Rental Housing," *Regional Science and Urban Economics*, 30:59-76.

Pindyck, R.S.

1991 "Irreversibility, Uncertainty, and Investment," *Journal of Economic Literature*, 29:1110-1148.

Ross, S.A.

1995 "Uses, Abuses, and Alternatives to the NPV Rules," *Financial Management*, 24:259-270.

Ross, S.A.

1998 "Valuation of Interacting Real Options in a Tollroad Infrastructure Project," *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 38:711-723.

Trigeorgis, L., and S. Mason

1987 "Valuing Managerial Flexibility," *Midland Corporate Finance Journal*, 5(1):14-21.

Trgeorgis, L.

- 1991 "A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* , 26(3):309-325.

Trgeorgis, L.

- 1993 "The Nature of Options Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(1):1-20.