住宅學報　第二十卷第一期　中華民國一百年六月　學術論著　第59頁—84頁
JOURNAL OF HOUSING STUDIES, VOLUME 20 NO. 1, JUNE 2011

學術論著

資本寬容對房屋抵押貸款保險之影響

The Impact of Capital Forbearance on Mortgage Insurance

楊智元*　張嘉倩**　王昭文***　徐守德****

Chih-Yuan Yang*, Chia-Chien Chang**, Chou-Wen Wang***, So-De Shyu****

摘　要

房屋抵押貸款保險制度在國外已經行之有年，並成為房貸市場重要機制。但是，在次貸風暴期間，大型房貸保險公司無不承擔龐大損失，各國政府卻不敢貿然讓房貸保險公司倒閉，以免造成系統性的金融危機。有鑑於此，本研究除了考慮房貸保險公司違約風險，並同時考量資本寬容機制，推導出房屋抵押貸款保險契約之公平保費公式解。藉由數值分析可知，資本寬容程度越高，房貸保險契約之保費越高。此外，隨著資產負債價值比例增加，資本寬容門檻值對於房貸保險保費之影響更顯重要。最後，藉由延長房貸保險公司經營時間來解決房貸保險公司資本不足問題，亦將使得房貸保險契約之保費上升，且當資產負債價值比例增加，延長經營時間效果對保費上升之效果亦趨明顯。

關鍵詞：資本寬容、房屋抵押貸款保險契約、違約風險

ABSTRACT

The system of mortgage insurance has developed over a long period of time and plays an important role in the housing financial market. Since many mortgage insurers suffered huge losses during the subprime mortgage crisis which resulted in capital scarcity, the government came under great pressure to bail them out in order to avoid a systemic economic crisis. Hence, this paper derives a closed-form formula for a mortgage insurance contract that takes into consideration counterparty default risk and capital forbearance. From the numerical analysis, we demonstrate that the mortgage insurance premium is an increasing function of the forbearance threshold. Furthermore, a higher asset–liability ratio leads to a more significant impact of the forbearance threshold on the fair premium for mortgage insurance. In addition, the longer the capital forbearance period and the higher the asset–liability ratio, the higher the fair premium of mortgage insurance.

Key words: capital forbearance, mortgage insurance contract, counterparty risk

(本文於2010年6月15日收稿，2010年12月25日審查通過，實際出版日期2011年 6 月)

* 清華大學經濟學系博士後研究
Postdoctoral Research Fellow, Department of Economics, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan. E-mail: chikyang@gmail.com

** 高雄應用科技大學金融系助理教授
Assistant Professor, Department of Finance, National Kaohsiung University of Applied Sciences, Kaohsiung, Taiwan. E-mail: cchiac@cc.kuas.edu.tw

*** 高雄第一科技大學風險管理與保險系副教授，聯絡作者
Associate Professor, Department of Risk Management and Insurance, National Kaohsiung First University of Science and Technology, Kaohsiung, Taiwan. E-mail: chouwenwang@gmail.com

**** 中山大學財務管理系教授
Professor, Department of Finance, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan. E-mail: dshyu@cm.nsysu.edu.tw

一、導論

房屋抵押貸款保險(mortgage insurance，以下簡稱房貸保險)制度在國外已經行之有年，承保的民營保險公司須在借款人(購屋者)無力償還房貸導致房屋贖回權被取消(foreclosure)時，針對放款機構(銀行)之損失，給予一定比例之補償，其損失涵蓋幅度約為20-30%。國外學者Canner & Passmore(1994)指出房貸保險是將放款機構所承擔之「借款人違約風險」部分移轉至保險公司，除了能降低金融機構之放款風險外，亦能使購屋者以較低的自備款購買房屋，提早完成家庭購屋目的，進而活絡房地產市場。此外，房貸保險機制的存在亦有助於建立標準化的房貸資料結構，促進初級房貸與次級房貸市場的效率性。

在房貸保險制度下，為有效保護放款銀行在經濟蕭條時免於遭受巨額損失，各國政府對於房貸保險公司之規定極為嚴格。例如，房貸保險契約之保費收入有50%必須撥入「可能損失準備金(contingency reserves)」中，且此項準備金在未來的十年內都不能動用。為進一步確保房貸保險公司有足夠的資本準備以應付未來可能面臨的風險，美國法令亦規定房貸保險公司之風險對資本比(risk-to-capital ratio)必須在25比1以內，亦即每1單位的資本額只能承作25單位的貸款風險(註1)。此外，房貸保險公司在從事投資時，亦針對不同投資標的訂立所須提撥的資本適足率。然而，近期席捲美國與世界各主要經濟體的次級房貸風暴(subprime mortgage crisis)，導致房屋貸款保險公司在2008年產生巨大虧損。全球最大的保險公司之一的美國國際集團(American International Group,AIG)在2007年第4季與2008年第1季合計虧損超過130億美元，這些驚人虧損隱含借款人違約風險的提高將導致相關產業陷入財務危機之機會大增。信用評等公司如穆迪(Moody's Investors Service)調降多數大型房貸保險公司評等；而美國八家主要民營貸款保險公司之一的 Triad Guaranty Insurance Corporation 亦因次貸危機而導致停業(註2)；2007年 Shares of Radian Guaranty 與 PMI 貸款保險集團當年度的虧損侵蝕高達資本額的90%，上述現象均顯示出借款人的違約風險已逐漸外溢至房貸保險公司，導致原本財務體質健全且信用評等良好的保險公司，亦面臨違約可能。有鑑於此，房屋抵押貸款保險之評價必需審慎地考量違約風險之影響。

另一方面來說，行之多年的房貸保險制度已成為社會安全與金融市場安定的重要基石，貿然讓房貸保險公司倒閉或強制停業所衍生的風險將外溢到其他金融機構，進而動搖整體金融體系。因此，當房貸保險公司無法達到最低資本要求，導致違約風險提高，政府機構卻會給予通融，藉以延遲無償付能力的房貸保險公司之破產時點，此即資本寬容(capital forbearance)概念。以美國為例，在次貸風暴以來，已實施多項金融拯救方案挽救危如累卵的房貸保險制度。隸屬於美國住宅與城市發展部(Department of Housing and Urban Development,HUD)的聯邦住宅企業監督局(Office of Federal Housing Enterprise Oversight,OFHEO)，為Fannie Mae與Freddie Mac的監管單位，不僅在2008年3月19日將Fannie Mae與Freddie Mac的資本要求由30%降低至20% (OFHEO估計此項措施將立即為房貸抵押證券市場提供高達2000億美金的資金)；同年7月13日，美國財長再宣布二項臨時性之緊急措施來支援Fannie Mae及Freddie Mac，由財政部提高二家公司之信用額度各約為22.5億美元。此外，美國聯邦儲備委員會(the Federal Reserve)亦在2008年9月16日向陷入困境的AIG集團提供850億美元的緊急救助。上述措施皆讓美國政府一直以來對於這些公司之「隱含性保證(implicit guarantee)」轉變為「明文保證(explicit guarantee)」。因此，房屋抵押貸款保險之評價亦需審

慎地考量資本寬容之影響。

文獻上針對房貸保險費率之研究，Kau et al.(1992, 1993, 1995)與 Kau & Keenan(1995, 1999)的作法是以結構式模型(structural approach)將利率與房價同時放入評價模型中內生考量。林左裕等(2006)探討房貸保險之費率結構，針對國內二大銀行之房貸資料，進行違約及提前清償行為模型參數之估計及其影響因素之探討。實證結果發現，市場利率、貸款成數、償還壓力等變數對提前清償行為有顯著影響；貸款成數與償還壓力等變數也對違約行為有顯著影響。然而，同時考量提前清償行為與隨機利率之平價模型較複雜且無法推導出公式解。再者，Hendershott & Van Order(1987)之實證結果發現利率波動度對於房貸保險契約之價值影響很小。因此，Schwartz & Torous(1993)、Dennis et al.(1997)、Bardhan et al.(2006)以及Chen et al.(2010)等均假設利率固定且違約機率外生給定。Kau & Keenan(1996)利用普瓦松過程來描述巨災事件對於房價往下跳躍之現象。此巨災事件可為天然災害導致房屋的破壞或是經濟的不利消息導致房價突發性的崩跌。Chen et al.(2010)假設房價服從對數跳躍擴散過程以捕捉異常衝擊事件的重要特性。再者利用美國房價資料進行實證分析，實證結果發現美國新屋價格確實存在跳躍現象。王昭文(2010)假設對數房屋價格服從常態調和穩態過程(Normal Tempered Stable Processes)下，推導出房屋抵押貸款保險合理保費。運用1986年1月至2008年6月之美國全國新屋價格每月報酬率，實證發現常態調和穩態過程具有極佳的配適能力。此外，透過數值分析可知，其他條件不變下，假設房屋價格為幾何布朗運動將低估房屋抵押貸款保險合理保費。

有關存款保險保費之定價，Merton(1977)首先提出以賣權的概念來計算風險基礎下的存款保險費率。在Merton(1977)的模型中提到銀行加入存款保險如同購買一個以投保前公司價值為標的之歐式賣權。Kane(1986)、Nagarajan & Sealey(1995)、Ronn & Verma(1986)以及 Lee et al.(2005)等作者延伸Merton(1977)的概念為基礎加入資本寬容進行存款保險之評價。Ronn & Verma(1986)認為公司資產價值並非低於負債就馬上關閉，而是等到資產價值下降至負債的某一個比率時， 銀行才會被要求關閉，該比率即為資本寬容比率。而本文房貸保險模型之設定並非如存款保險之賣權概念，以房屋價值與貸款餘額之差異來決定房貸保險的保費。本文沿用 Bardhan et al.(2006)的作法，主要以精算模型計算合理房貸保險之保費價值，即貸款人違約下房貸保險公司的實際損失視為一個賣權的投資組合，並在保費收入總現值等於房貸保險預期損失現值下，決定出合理保費價值。

然而，在房貸保險的訂價模型中，卻鮮少考量到房貸保險公司違約可能性與資本寬容之影響。因此，本文研究目的與主要貢獻是在同時考慮保險公司違約風險與資本寬容制度下，針對房屋抵押貸款保險之保費推導出一般化的評價公式。最後，透過數值分析，探討資本寬容相關參數對於房屋抵押貸款保險契約保費之影響。

藉由數值分析，本文之研究結果如下：(1)由於資本寬容允許資本不足的房貸保險公司得以延續營運，當資本寬容程度越大，房貸保險契約之保費越高。此外，資本寬容門檻效果對於房貸保險保費影響隨著資產負債價值比例增加而上升。(2)資本寬容允許資本不足的房貸保險公司得以延續營運之經營時間越長，將使得房貸保險契約之保費上升。此效果亦隨著期初的資產負債價值比例越高而亦趨明顯。(3)法定資本參數與房貸保險契約之保費具有正向關係。(4)資產與負債之相關係數與負債與房價之相關係數對於房貸保險契約價值之影響皆為正向影響。本文研究的結果除可提供學術界探討有關保險公司違約風險與資本寬容之下房貸保

險契約價值之變動關係，亦可提供借款人參考，讓其清楚了解到不同情境下應支付之合理保費。

本研究共分為五部份，第一部份為導論，第二部份為理論模型的說明，第三部份為房貸保險契約之現金流量型式與評價，第四部份為數值結果分析，而最後一部份則為結論。

二、理論模型

本節主要針對影響房貸保險契約公平保費決定之重要變數－房屋價格、房貸保險公司之資產與負債－之動態過程做設定，並同時考量房價、房貸保險公司之資產與負債間之相互影響情況，藉以合理求算出房貸保險之公平保費。

(一)、房價動態過程

依循 Kau et al.(1992, 1993, 1995)與 Bardhan et al.(2006)之設定，本文假設房價動態過程服從對數常態分配如下：

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = (\mu_H - \delta)\, dt + \tilde{\sigma}_H dW_H(t) \text{，} \cdots\cdots (1)$$

其中，$H(t)$表示在時點t之房價；μ_H 為房價預期的成長率；δ 為房屋維修成本率；$\tilde{\sigma}_H$ 為房價報酬率之波動度。

(二)、房貸保險公司之資產過程

由於房貸抵押保險公司主要業務為承作房貸保險保單，故保費收入為主要收入來源。由於保費會受到房價變動的影響，本文除考量房貸保險公司之資產服從對數常態分配外，亦考量房貸保險公司之資產變動對房價變動之敏感程度。因此，房貸保險公司之資產動態過程設定如下：

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \mu_A dt + \left[\phi_{AH}\, dW_H(t) + \sigma_A\, dW_A(t)\right] \text{，} \cdots\cdots (2)$$

其中，μ_A 為資產之瞬時的漂浮項；$\{W_A(t): t > 0\}$ 為單維度之標準布朗運動；$\sigma_A = \tilde{\sigma}_A \sqrt{1-\rho_{AH}^2}$，其中 $\tilde{\sigma}_A$ 為公司資產報酬率之波動度。$\phi_{AH} = \tilde{\sigma}_A\ \rho_{AH}$ 為房貸保險公司資產對於房價變動之敏感彈性，ρ_{AH} 為房貸保險公司資產與房價之相關係數。故，敏感彈性主要受到公司資產報酬率之波動度與房貸保險公司資產與房價報酬率之相關係數影響。公式 (2) 資產動態過程之詳細敘述請見附件一。

(三)、房貸保險公司之負債過程

傳統文獻上，如 Merton (1977)等，均假設房貸保險公司之負債過程服從對數常態分配。然而，房貸保險之理賠金額亦會受到房價變動之影響，進而影響到房貸保險公司之負債金額。因此，本文除了假設房貸保險公司之負債過程服從對數常態分配外，並同時考量房貸保險公司之負債亦會受到保險公司資產與房價變動之影響，其動態過程設定如下：

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \mu_L\, dt + \left[\phi_{LH} dW_H(t) + \phi_{LA}\, dW_A(t) + \sigma_L\, dW_L(t)\right] \text{，} \cdots\cdots (3)$$

其中，μ_L 表示為負債之瞬時的漂浮項；$\{W_A(t):t>0\}$ 為單維度之標準布朗運動；$\phi_{LH}=\tilde{\sigma}_L\rho_{LH}$ 為房貸保險公司負債對於房價變動之敏感彈性，ρ_{LH} 為房貸保險公司負債與房價間相關係數。因此，負債對房價之敏感彈性主要受到公司負債之波動度與負債與房價之相關係數影響。同理，$\phi_{LA}=\tilde{\sigma}_L\left(\rho_{LA}-\rho_{AH}\rho_{LH}\right)\Big/\sqrt{1-\rho_{AH}^2}$ 為房貸保險公司負債對於保險公司資產變動之敏感彈性，其主要受到公司負債報酬率之波動度 $\tilde{\sigma}_L$ 、ρ_{AH} 以及房貸保險公司負債與資產之相關係數 ρ_{LA} 影響；$\sigma_L=\tilde{\sigma}_L\sqrt{1-\phi_{LH}^2-\phi_{LA}^2}$ 。公式(3)之負債動態過程的詳細敘述亦請見附件一。

三、房貸保險契約之現金流量型式與評價

在起始時點 $t_0=0$，借款人向貸款銀行進行 T 年期的房屋貸款，期初貸款金額為 $B(0)=L_vH(0)$，其中 L_v 為期初貸款乘數。在時點 $t_0=0$，房貸保險公司承作房貸保險契約，貸款利率為固定利率 c，借款人每年在時點 t_i 的償付金額為 x，$i=1,2,...,N,$ 其中 $t_N=T$。因此，若借款人在時點 t_i 前未違約，在時點 t_i 時借款人之貸款餘額 $B(t_i)$ 可表示如下：

$$B(t_i)=\frac{x}{c}\left(1-\frac{1}{(1+c)^{T-t_i}}\right) \tag{4}$$

在時點 t_i 時，若借款人發生違約，房貸保險公司須補償貸款損失金額給貸款銀行，該補償金額上限等於保險契約損失涵蓋幅度 L_R 乘上貸款餘額 $B(t_i)$，亦即 $L_RB(t_i)$ 。

本文在評價房貸保險價值時，同時考量房貸保險公司可能因次級房貸風暴或重大金融危機導致龐大虧損，進而導致破產可能，但政府為確保金融體系不會受到牽連，亦會採取資本寬容政策。此時，房貸保險公司將不會被立即接管，除非房貸保險公司之資產價值低於資本寬容的門檻 $\theta L(t_i)$ ，其中 θ 為寬容參數，其值小於或等於1；$L(t_i)$ 則為時點 t_i 之房貸保險公司負債價值。換言之，即使房貸保險公司之資產與負債價值比例無法符合法定資本參數 q，只要資產價值沒有低於資本寬容門檻，房貸保險公司將不會被迫立即面臨接管命運，並且可延長其營運時間至 $t_i+\tau$ 。根據美國法令規定，房貸保險公司之公司風險對資本比必須在25比1之內，表示每1單位資本只能承作25單位的貸款風險。因此，在本模型中，法定資本參數可轉換成 q=1+4%=1.04。最後，如同 Bardhan et al. (2006)之模型設定，本文假設借款人之違約機率與房價過程獨立，且為 $P_d(t_i)=P(\tau_d\le t_i)=1-\exp(-\lambda t_i)$ ，其中 λ 為違約頻率，$i=1,2,...,N$ 。此外，因借款人不會在無須繳交保費期間中選擇違約，故本文假設借款人違約只發生在支付房貸保險契約保費之時點。再者，房貸保險公司主要承作為房貸保險業務，故本文亦考量在借款人發生違約時，房貸保險公司可能隨之破產的可能。因此，同時考量房貸保險公司之違約風險與資本寬容政策下，抵押保險公司必須支付給貸款銀行之現金流量可分為以下七種情況探討：

<table>
<tr><th>房價與房屋貸款餘額間關係
考慮保險公司之違約風險與資本寬容</th><th>時點 t_i
若房價 $H(t_i)$ 小於 $(1-L_R)B(t_i)$</th><th>時點 t_i
若房價 $H(t_i)$ 介於 $(1-L_R)B(t_i)$ 與 $B(t_i)$ 之間</th><th>時點 t_i
若房價 $H(t_i)$ 大於等於房屋貸款餘額 $B(t_i)$</th></tr>
<tr><td>房貸保險公司之資產負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 大於法定資本參數 q</td><td>情況一</td><td>情況四</td><td rowspan="3">情況七</td></tr>
<tr><td>房貸保險公司之資產負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 介於資本寬容參數 θ 與法定資本參數 q 之間</td><td>情況二</td><td>情況五</td></tr>
<tr><td>房貸保險公司之資產負 $A(t_i)/L(t_i)$ 小於資本寬容參數 θ</td><td>情況三</td><td>情況六</td></tr>
</table>

以下分別針對上述情況，求算各情況下房貸保險契約所需支付現金流量折現值。

情況一：若房價 $H(t_i)$ 小於 $(1-L_R)B(t_i)$，借款人亦於時點 t_i 違約且房貸保險公司在時點 t_i 之資產負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 大於法定資本參數 q，此時房貸保險公司須支付貸款銀行之金額等於 $L_R B(t_i)$。因此，給定借款人於時點 t_i 違約情境下，情況一之房貸保險契約的現金流量 $C_1(t_i)$ 如下：

$$C_1(t_i) = L_R B(t_i),\ \text{若}\ H(t_i) < (1-L_R)B(t_i)\ \text{並且}\ \frac{A(t_i)}{L(t_i)} \geq q \quad \cdots\cdots (5)$$

因此，情況一之現金流量折現值之封閉解如下：

$$e^{-rt_i}E_Q(C_2(t_i)) = L_R B(t_i)e^{-rt_i}N_2(-d_2^{1,i}, e_2^{2,i}, \rho_1)\ ,$$

其中

$$d_2^{h,\,i} = \frac{\ln\left(\dfrac{H(0)}{K_{hi}}\right) + \left(r - \dfrac{1}{2}\tilde{\sigma}_H^2\right)t_i}{\tilde{\sigma}_H\sqrt{t_i}},\quad e_2^{k,\,i} = \frac{\ln\left(\dfrac{A(0)}{l_k L(0)}\right) + \left(-\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L + \tilde{\sigma}_L^2 - \dfrac{1}{2}\left|\sigma_{AL}\right|^2\right)t_i}{\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i}}\ ,$$

$$\rho_1 = \frac{-\rho_{AH}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_H + \rho_{HL}\tilde{\sigma}_H\tilde{\sigma}_L}{\tilde{\sigma}_H\sigma_{AL}}\ ,\ \left|\sigma_{AL}\right|^2 = \tilde{\sigma}_A^2 - 2\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L + \tilde{\sigma}_L^2\ ;$$

$K_{1i} = (1-L_R)B(t_i)$、$K_{2i} = B(t_i)$、$l_1 = \theta$ 且 $l_2 = q$。詳細推導過程請見附件二。

情況二：若房價 $H(t_i)$ 小於 $(1-L_R)B(t_i)$ ，借款人亦於時點 t_i 違約且房貸保險公司在時點 t_i 資產負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 介於 θ 與q之間，由於符合政府對房貸保險公司採取之資本寬容政策條件，故允許房貸保險公司延長營運時間至 $t_i+\tau$ 。因此，在時點 $t_i+\tau$ 時房貸保險公司須支付給貸款銀行之金額如下：

$$F(t_i+\tau)=\begin{cases} L_R B(t_i)e^{c\tau} & \text{若 } \dfrac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\geq g, \\ \dfrac{L_R B(t_i)e^{c\tau}A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)} & \text{若 } \dfrac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}< g \end{cases} \quad \cdots\cdots (6)$$

亦即在資本寬容期限屆滿時，如果資產負債價值比例已超過規定之繼續營運所需最低資本參數g，此時房貸保險公司將賠償貸款銀行之損失(包含資本寬容期間以貸款利率計息之累計利息)。但是，若資產負債價值仍未到達繼續營運所需最低資本參數g時，此時房貸保險公司將破產，賠償金額中的每一塊錢將只剩資本寬容到期時之房貸保險公司資產價值與負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 。因此，給定借款人於時點 t_i 違約情境下，情況二之房貸保險契約的現金流量 $C_2(t_i)$ 如下：

$$C_2(t_i)=F(t_i),\quad \text{若 } H(t_i)<(1-L_R)B(t_i) \text{ 且 } \theta\leq\frac{A(t_i)}{L(t_i)}<q \quad \cdots\cdots (7)$$

因此，情況二之現金流量折現值之封閉解如下：

$$e^{-rt_i}E_Q(C_2(t_i))=-L_R B(t_i)e^{c\tau}e^{-r(t_i+\tau)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k N_3\left(-d_2^{1,i},e_2^{k,i},f_2^i,\Sigma_i\right)$$

$$-L_R B(t_i)e^{c\tau}\frac{A(0)}{L(0)}\exp\left(-(r+\sigma_L(\sigma_A-\sigma_L)(t_i+\tau)\right)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k N_3\left(-(d_2^{1,i}+a\sqrt{t_i}),e_1^{k,i},f_1^i,\bar{\Sigma}_i\right),$$

其中

$$f_1^i=\frac{\ln\left(\dfrac{A(0)}{gL(0)}\right)+\left(-\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L+\tilde{\sigma}_L^2+\dfrac{1}{2}\left|\sigma_{AL}\right|^2\right)(t_i+\tau)}{\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i+\tau}},\quad f_2^i=f_1^i-\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i+\tau},$$

$$a=\rho_{AH}\tilde{\sigma}_A-\rho_{HL}\tilde{\sigma}_L,\quad e_1^{k,i}=\frac{\ln\left(\dfrac{A(0)}{l_k L(0)}\right)+\left(-\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L+\tilde{\sigma}_L^2+\dfrac{1}{2}\left|\sigma_{AL}\right|^2\right)t_i}{\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i}},$$

$$\Sigma_i=\begin{bmatrix}1 & \rho_1 & \rho_1\sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} \\ \rho_1 & 1 & \sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} \\ \rho_1\sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} & \sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} & 1\end{bmatrix},\quad \bar{\Sigma}_i=\begin{bmatrix}1 & \rho_1 & -\rho_1\sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} \\ \rho_1 & 1 & -\sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} \\ -\rho_1\sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} & -\sqrt{\dfrac{t_i}{t_i+\tau}} & 1\end{bmatrix}$$

詳細推導過程請見附件三。

情況三：若房價 $H(t_i)$ 小於 $(1-L_R)B(t_i)$ ，借款人亦於時點 t_i 違約且房貸保險公司之時點 t_i 資產負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 小於資本寬容參數 θ ，房貸保險公司須支付給貸款銀行之金額等於 $L_R B(t_i)$ 乘上資產負債價值比例。因此，給定借款人於時點 t_i 違約情境下，情況三之房貸保險契約的現金流量 $C_3(t_i)$ 如下：

$$C_3(t_i)=\frac{L_R B(t_i)A(t_i)}{L(t_i)},\quad \text{若 } H(t_i)<(1-L_R)B(t_i) \text{ 並且 } \frac{A(t_i)}{L(t_i)}<\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(8)}$$

因此，情況三之現金流量折現值之封閉解如下：

$$e^{-rt_i}E_Q(C_3(t_i))=L_R B(t_i)e^{-rt_i}N_2\left(-(d_2^{1,i}+a\sqrt{t_i}),-e_1^{1,i},-\rho_1\right)$$

詳細推導過程請見附件四。

情況四：若房價 $H(t_i)$ 介於 $(1-L_R)B(t_i)$ 與 $B(t_i)$ 之間，借款人亦於時點 t_i 違約且房貸保險公司在時點 t_i 資產負債價值比例大於法定資本參數 q ，其須支付給貸款銀行之金額為貸款餘額與房屋價值之差價 $B(t_i)-H(t_i)$ 。因此，給定借款人於時點 t_i 違約情境下，情況四之房貸保險契約的現金流量 $C_4(t_i)$ 如下：

$$C_4(t_i)=(B(t_i)-H(t_i)),\qquad \text{若 } (1-L_R)B(t_i)\le H(t)<B(t_i) \text{ 並且 } \frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge q \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(9)}$$

因此，情況四之現金流量折現值之封閉解如下：

$$e^{-rt_i}E_Q(C_4(t_i))=B(t_i)e^{-rt_i}\sum_{h=1}^{2}(-1)^h N_2\left(-d_2^{h,i},e_2^{2,i},\rho_1\right)-H(0)\sum_{h=1}^{2}(-1)^h N_2\left(-d_1^{h,i},e_2^{2i}+b\sqrt{t_i},\rho_1\right),$$

其中， $d_1^{h,i}=d_2^{h,i}+\tilde{\sigma}_H\sqrt{t_i}$ ， $b=\dfrac{\rho_{AH}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_H-\rho_{HL}\tilde{\sigma}_H\tilde{\sigma}_L}{\sigma_{AL}}$ 。詳細推導過程請見附件五。

情況五：若房價 $H(t_i)$ 介於 $(1-L_R)B(t_i)$ 與 $B(t_i)$ 之間，借款人亦於時點 t_i 違約且房貸保險公司在時點 t_i 資產負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 介於 θ 與 q 之間，政府將對保險公司採取資本寬容措施，並允許房貸保險公司多延長 τ 之營運時間。因此，給定借款人於時點 t_i 違約，在 $t_i+\tau$ 時點保險公司須支付給貸款銀行之金額如下：

$$G(t_i+\tau)=\begin{cases}(B(t_i)e^{c\tau}-H(t_i+\tau)), & \text{若 } \dfrac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\ge g,\\[2ex] \dfrac{(B(t_i)e^{c\tau}-H(t_i+\tau))A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}, & \text{若 } \dfrac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}<g\end{cases}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(10)}$$

因此，情況五之房貸保險契約在時點 t_i 的現金流量 $C_5(t_i)$ 如下：

$$C_5(t_i)=G(t_i),\quad \text{若 } (1-L_R)B(t_i)\le H(t_i)<B(t_i) \text{ 並且 } \theta\le\frac{A(t_i)}{L(t_i)}<q \text{ 。} \cdots\cdots\cdots \text{(11)}$$

因此，情況五之現金流量折現值之封閉解如下：

$$e^{-rt_i}E_Q(C_5(t_i)) = -B(t_i)e^{c\tau}e^{-r(t_i+\tau)}\sum_{h=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{h+k}N_3\left(-d_2^{h,i}, e_2^{k,i}, f_2^i, \Sigma_i\right)$$

$$+H(0)\sum_{h=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{h+k}N_3\left(-d_1^{h,i}, e_2^{k,i}+b\sqrt{t_i}, f_2^i+b\sqrt{t_i+\tau}, \Sigma_i\right)$$

$$-B(t_i)e^{c\tau}\frac{A(0)}{L(0)}\exp\left(-(r+\rho_{LA}\tilde{\sigma}_L\tilde{\sigma}_A-\tilde{\sigma}_L^2)(t_i+\tau)\right)\sum_{h=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{h+k}N_3\left(-(d_2^{h,i}+a\sqrt{t_i}), e_1^{k,i}, f_1^i, \bar{\Sigma}_i\right)$$

$$+H(0)F(0)e^{\sigma_{HLA}(t_i+\tau)}\sum_{h=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{h+k}N_3\left(-(d_1^{h,i}+a\sqrt{t_i}), e_1^{k,i}+b\sqrt{t_i}, -(f_1^i+b\sqrt{t_i+\tau}), \bar{\bar{\Sigma}}_i\right)$$

其中，$\sigma_{HLA}=\rho_{AH}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_H-\rho_{LH}\tilde{\sigma}_L\tilde{\sigma}_H-\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L+\tilde{\sigma}_L^2$。詳細推導過程請見附件六。

情況六：若房價 $H(t_i)$ 介於 $(1-L_R)B(t_i)$ 與 $B(t_i)$ 之間，借款人亦於時點 t_i 違約且房貸保險公司在時點 t_i 資產負債價值比例 $A(t_i)/L(t_i)$ 小於資本寬容參數 θ，此時房貸保險公司須支付給貸款銀行之金額為 $B(t_i)-H(t_i)$ 乘上資產負債價值比例。因此，給定借款人於時點 t_i 違約，情況六之房貸保險契約在時點 t_i 的現金流量 $C_6(t_i)$ 如下：

$$C_6(t_i)=\frac{(B(t_i)-H(t_i))A(t_i)}{L(t_i)},\ 若\ (1-L_R)B(t_i)\le H(t_i)<B(t_i)\ 並且\ \frac{A(t_i)}{L(t_i)}<\theta \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

因此，情況六之現金流量折現值之封閉解如下：

$$e^{-rt_i}E_Q(C_6(t_i))=B(t_i)\frac{A(0)}{L(0)}\exp(-(r+\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L-\tilde{\sigma}_L^2)t_i)\sum_{h=1}^{2}(-1)^h N_2(-(d_2^{1,i}+a\sqrt{t_i}), -e_1^{1,i}, -\rho_1)$$

$$-H(0)F(0)e^{\sigma_{HLA}(t_i+\tau)}\sum_{h=1}^{2}(-1)^h N_2(-(d_2^{h,i}+a\sqrt{t_i}), -(e_1^{k,i}+b\sqrt{t_i}), -\rho_1)$$

詳細推導過程請見附件七。

情況七：若房價 $H(t_i)$ 大於等於房屋貸款餘額時，由於房價價值足以償還房屋貸款餘額，此時房屋保險契約之現金流量為0。

給定上述七種情況之現金流量折現值封閉解下，如同Bardhan et al.(2006)之模型設定，假設房價與借款人之違約機率獨立且房貸保險契約保單為躉繳保單。在預期收入與預期支出原則下，房貸保險契約之公平保費 $MIC(0)$ 公式如下：

$$MIC(0)=\sum_{i=1}^{N}P_d(t_i)\left(\sum_{j=1}^{6}e^{-rt_i}C_j(t_i)\right) \quad \cdots\cdots\cdots (13)$$

若房貸保險公司預期賺取毛利潤為m，房貸保險公司最終訂定之保費公式如下：

$$FPA(0) = (1+m)MIC(0) \cdots\cdots (13)$$

四、數值分析

運用第三節所推導出的房貸保險之保費公式解，本節將探討保費與評價相關參數間關係。數值分析中探討之重要參數包含：資本寬容參數、延遲經營時間、資本要求率參數、資產與負債相關係數、負債與房價相關係數。評價相關參數之數值設定如表一所示。

在變動借款人違約頻率λ、房價報酬率波動度σ_H以及資產負債價值比例A/L下，表二顯示相關參數對房貸保險保單與違約風險溢酬之影響。由表二可知，借款人違約頻率、房價報酬率波動度以及資產負債價值比例均與房貸保險之保費呈現正向關係。其經濟涵義如下：當借款人違約頻率增加時，抵押保險公司之可能損失增加，導致房貸保險的保費上升。再者，房價報酬率波動度上升時，表示所面臨的房價風險提高，此將導致抵押保險公司潛在損失升高，因而使得房貸保險的保費上升。最後，當資產負債價值比例上升時，表示抵押保險公司之違約風險降低。若借款人違約時，抵押保險公司較有能力支付損失，因而導致房貸保險保單的保費上升。另一方面，表二亦顯示違約風險溢酬為借款人違約頻率與房價報酬率波動度之遞增函數；違約風險溢酬則為資產負債價值比例之遞減函數。

在變動資本寬容參數θ、法定資本參數q、延長營運時間τ以及資產負債價值比例A/L下，表三顯示相關參數對房貸保險保單之影響。由表三可知，資本寬容政策允許房貸保險公司在資本相對不足時，得以繼續營運。因此，當資本寬容參數 越低，亦即資本寬容程度越大，房貸保險契約之保費越高。例如，當法定資本參數為1.04、A/L=1.3且延長營運時間為2年時，資本寬容參數從100% 降到95% 與90%，將導致房貸保險之保費從1089.2增加至2805.4與4600。此外，資本寬容門檻效果對於房貸保險保費影響亦隨著資產負債價值比例增加而上升。例如，在給定法定資本參數為1.04與延長營運時間為2年情況下，如果資本寬容參數從100% 降到 90%，資產負債價值比例為1.3時，房貸保險保費增加3510.8，當資產負債價值比例上升至1.5時，房貸保險保費增加則為3754.7，明顯高於資產負債價值比例為1.3時之增加幅度。

再者，表三顯示延長房貸保險公司經營時間(τ)以解決資本不足的房貸保險公司，將導致房貸保險契約之保費上升。尤其，當資產負債價值比例增加時，延長經營時間效果對保費影響越明顯。例如：當延長經營時間從1年增加至3年時，若房貸保險公司之資產負債價值比例為1.3時，房貸保險契約保費增加1095；若房貸保險公司資產負債價值比例變成1.5，房貸保險契約保費則增加1142.5，亦即資產負債價值比例越高，延長經營時間對保費之正向影響越顯著。從表3數值分析亦可發現，法定資本參數與房貸保險契約之保費具有正向關係。總言之，資本寬容參數、法定資本參數以及延長營運時間之效果對於房貸保險契約之保費具有顯著影響。再者，若延長房貸保險公司經營時間極長(令τ=100)，其隱含房貸保險公司違約機率極低，因此，其房貸保費如同 Bardhan et al.(2006)模型所計算出的保費，並且其保費高於考慮房貸保險公司違約風險下之房貸保費。因此，由表三可知，與不考慮資本寬容下所推導出的公平保費做比較，考慮資本寬容(允許延長房貸保險公司經營時間)之保費相對而言高出許多，此結果與實務相符合並較具合理性。此現象的合理性與原因為：在實務上信用評等越高的保險

表一 參數數值設定

資產參數		數值
$A(0)$	保險公司資產價值	110、130以及150
$\tilde{\sigma}_A$	資產價值之波動度	1% 、5%以及10%
ρ_{AH}	保險公司資產與房價之相關係數	-0.5以及0.5
負債參數		
$L(0)$	保險公司負債價值	100
$\tilde{\sigma}_L$	負債價值之波動度	1%、 5%以及10%
ρ_{LH}	保險公司負債與房價之相關係數	-0.5、0以及0.5
ρ_{LA}	保險公司負債與資產之相關係數	-0.5、0以及0.5
房價參數		
$H(0)$	房屋價值	200000
$\tilde{\sigma}_H$	房屋價格之波動度	10%、20%以及40%
其他參數		
L_R	保險涵蓋損失之水準	40%
y	清償金額	6000
m	房貸保險公司毛利潤	2%
$c = r + \text{spread}$	契約利率	spread=2%、 r =2%
T	房貸期限	30 年
θ	資本寬容參數	90%、95%以及100%
τ	延遲經營時間	1年、2年以及3年
q	資本要求率參數	1.04、1.05以及1.06
g	繼續營運所需最低資本參數	1
λ	違約頻率	1%、5% 以及10%

註：表一的資產(負債)以及資本寬容之相關參數設定參考Lee et al.(2005)；房價參數(房屋價值與房屋價格之波動度)的設定值參考Kau et al.(1992,1993,1995)；資本要求率參數之設定則依照美國法律規定。

公司，即越不容易違約的公司(例如：國泰或國華等保險公司)，其貸款人通常支付的保費較高。因此，當經濟突發事件發生(例如：次貸風暴事件)，在法定資本適足率的要求下，導致抵押保險公司信用等級下降並面臨倒閉危機。此時，當貸款人違約時，房貸保險公司能夠支付給銀行的損失降低。因此，在保費收入總現值等於抵押保險預期損失現值下，房貸保險公司索取的保費會降低。若政府延長房貸保險公司之經營時間，則房貸保險公司可能轉虧為盈，因而房貸保險公司的違約風險降低。則當貸款人違約時，房貸保險公司能夠支付給銀行的損失增加。因此，在保費收入總現值等於抵押保險預期損失現值之原則下，房貸保險公司索取的保費會增加。

表四顯示負債對於資產與房價之相關係數以及資產與負債之波動度對於房貸保險契約保費之影響。由表四數值結果可知，資產與負債間相關係數與房貸保險契約價值呈現正相關趨勢。例如: 當資產與負債之波動度為0.01、資產負債價值比例為1.1、負債(資產)與房價之相關係數皆為-0.5且當負債(資產)與房價之相關係數從 -0.5 變動至 0時，房貸保險保費則從343.34增加至410.15；當負債(資產)與房價之相關係數從 0 變動至 0.5時，房貸保險保費則由410.15增加到539.15。此外，相關係數變動對於房貸保險契約價值之影響亦隨著資產負債價值比例上升而增加。例如，當資產負債價值比例為1.5時，負債(資產)與房價之相關係數皆為-0.5且若負債(資產)與房價之相關係數從 -0.5 變動至 0時，房貸保險保費將從411.21增加到549.16，增加幅度137.95高於資產負債價值比例為1.1時之增加幅度66.81。另一方面，由表四亦發現資產與負債之波動度對於房貸保險契約保費呈現正向關係。例如: 當負債(資產)與房價之相關係數皆為-0.5且資產與負債之波動度皆從0.01變動至0.05時，房貸保險保費則從343.34增加至443.24；當資產與負債之波動度從 0.05 變動至 0.1時，房貸保險保費則由443.24增加到563.24。

表二 違約風險相關參數與房貸保險契約公平保費之關係

$(\tilde{\sigma}_H,\lambda)$	無違約風險	違約風險			違約風險溢酬		
		1.1	1.3	1.5	1.1	1.3	1.5
(0.1,0.01)	643.77	603.763	625.06	632.74	40.007	18.71	11.03
(0.1,0.05)	588.44	532.74	559.673	568.433	55.7	28.767	20.007
(0.1,0.1)	572.24	498.24	524.953	550.14	74	47.287	22.1
(0.2,0.01)	654.93	612.9	632.4	638.7	42.03	22.53	16.23
(0.2,0.05)	635.2	578.7	592.2	601.5	56.5	43	33.7
(0.2,0.1)	602.9	526.2	551.6	562.1	76.7	51.3	40.8
(0.4,0.01)	671.96	606.453	621.28	647.93	65.507	50.68	24.03
(0.4,0.05)	650.63	589.93	602.863	615.623	60.7	47.767	35.007
(0.4,0.1)	616.43	538.83	561.143	575.33	77.6	55.287	41.1

表三 資本要求率參數與房貸保險契約公平保費之關係

資本要求率參數	1.04			1.05			1.06		
資本寬容參數	100%	95%	90%	100%	95%	90%	100%	95%	90%
延遲經營時間(年)					資產/負債=1.1				
1	500.5	2024.6	3600.8	513.1	2075.6	3690.2	527.0	2131.1	3787.3
2	1002.4	2549.0	4134.3	1027.7	2612.7	4236.4	1055.3	2681.8	4347.1
3	1506.4	3079.2	4677.6	1544.8	3156.0	4792.7	1586.4	3239.1	4917.5
100	2012.1	3587.5	5186.1	2053.5	3664.9	5301.4	2094.8	3747.5	5424.2
延遲經營時間(年)					資產/負債=1.3				
1	543.4	2216.4	3991.1	563.8	2298.4	4134.7	585.6	2385.6	4287.3
2	1089.2	2805.4	4600.0	1129.9	2907.7	4763.9	1173.2	3016.4	4938.0
3	1638.4	3404.5	5226.5	1700.0	3527.7	5411.3	1765.4	3658.4	5607.4
100	2190.4	3956.5	5778.5	2252.2	4078.6	5963.4	2315.4	4211.1	6158.3
延遲經營時間(年)					資產/負債=1.5				
1	568.7	2328.3	4230.4	590.3	2413.6	4379.4	612.6	2500.9	4531.7
2	1138.9	2957.9	4893.6	1181.5	3064.3	5063.6	1225.2	3173.0	5237.4
3	1711.2	3597.2	5577.7	1774.9	3724.6	5768.8	1839.9	3854.7	5963.9
100	2287.1	4173.5	6153.9	2350.5	4301.1	6344.1	2414.2	4430.1	6540.1

表四 負債與資產(房價)之相關係數以及資產與負債之波動度對房貸保險契約保費之關係

$(\tilde{\sigma}_A,\tilde{\sigma}_L)$	(ρ_{AL},ρ_{LH})	資產/負債		
		1.1	1.3	1.5
(0.01, 0.01)	(-0.5, -0.5)	343.34	358.64	411.21
(0.01, 0.01)	(0, 0)	410.15	469.17	549.16
(0.01, 0.01)	(0.5, 0.5)	539.15	612.27	709.47
(0.05, 0.05)	(-0.5, -0.5)	443.24	458.33	484.21
(0.05, 0.05)	(0, 0)	518.15	570.97	626.1
(0.05, 0.05)	(0.5, 0.5)	650.15	743.97	791.72
(0.1, 0.1)	(-0.5, -0.5)	563.24	578.52	591.44
(0.1, 0.1)	(0, 0)	641.15	697.78	765.16
(0.1, 0.1)	(0.5, 0.5)	775.15	878.89	936.37

五、結論

Canner & Passmore(1994)指出房屋抵押貸款保險(mortgage insurance)對於房屋市場有極重要的角色。尤其是對不動產融資市場的穩定具有莫大的影響力，因為房貸保險契約的存在，即隱含對房屋貸款之合理評價。

目前在台灣房屋抵押貸款保險之契約雖尚未普及，但類似的相關商品已逐漸上市，例如：透過放款的金融機構(銀行)與保險公司異業結盟所提供之「房貸壽險」商品(註3)，可避免房貸客戶在房屋貸款期間因意外、疾病等事故，導致無法繳清房貸餘額的一種壽險商品，這種保險商品即可視為「一般壽險」與「房貸保險」的結合，其保險金額與保險費用會逐年遞減，直到房貸終止日為止。對於銀行而言，藉由要求房貸客戶購買此類商品，可確保貸款債權無虞；對於保險公司而言，則可以增加保費收入，並開發其潛在客戶；對於客戶(購屋者)而言，購買此類保險商品可避免借款人萬一發生意外或死亡時，遺族家屬無力償付房貸導致擔保品淪為法拍之途，可以避免遺族家屬再度遭受二次傷害。這些組合商品的存在，即反映出市場對於房屋抵押貸款保險之需求。

大體而言，房屋抵押貸款保險在台灣推動之意義可簡述如下：

(一)給予債權銀行雙重保險

房屋抵押貸款保險之推動，對於放款的金融機構而言，除了貸款契約本身的抵押品(房屋)

之外，另提供一額外的保護傘予放款銀行，可以確保貸款債權無虞，進而健全不動產的融資市場。

(二) 促進金融業務的多元化

房屋抵押貸款保險可以促進銀行與保險公司等金融機構的業務多元化，也可將金融機構與保險公司等的社會責任與營利目標緊密結合，從而增加金融機構獲利的機會，對於金融產業的後續發展有所助益。

(三) 促進房地產市場的健全發展

因為房貸保險之制度可以有效保護放款金融機構之債權無虞，故能增加金融機構承貸之意願，同時有助於不動產融資市場的穩定健全。另一方面，房貸保險契約的存在，即隱含對房屋價格與房屋貸款之合理評價，故可提供完整的房屋貸款資料以及更加透明的房價資訊，有助於房地產市場的健全與發展。

(四) 金融穩定

房貸保險制度透過保險契約，可以保障放款金融機構的債權，而降低放款風險之利益則可轉嫁至債務人，讓購屋者可以用較低自備款進行購屋，同時房貸保險契約亦可增加保險公司的保費收入與潛在客戶，讓整體經濟與金融更加穩健，成為社會安定的基石之一。

次級房貸風暴導致房貸保險公司承擔了龐大損失，並迫使相關產業陷入財務困境。然而，若貿然讓房貸保險公司倒閉，其強制停業所衍生風險將外溢到金融體系中其他銀行與金融機構，進而動搖整體經濟結構。因此，本文在同時考慮保險公司違約風險與資本寬容制度下，推導出房屋抵押貸款保險契約之公平保費公式解。透過數值結果可知，當資本寬容參數越低，亦即資本寬容程度越大，房貸保險契約之保費越高。此外，資本寬容門檻效果對於房貸保險保費影響亦隨著資產負債價值比例增加而上升。法定資本參數與房貸保險契約之保費亦呈現正向關係。再者，延長房貸保險公司經營時間以解決房貸保險公司之資本不足問題，將使得房貸保險契約之保費上升，且當資產負債價值比例增加，延長經營時間效果對保費影響越明顯。若延長房貸保險公司經營時間極長，其隱含房貸保險公司違約機率極低，因此，其保費如同 Bardhan et al.(2006)模型下所算出的保費，並且其保費高於考慮房貸保險公司違約風險下之保費。最後，負債對資產與房價之相關係數對於房貸保險保費皆為正向影響。

綜言之，本研究同時考慮保險公司違約風險與資本寬容制度，推導出更為合理的保費，可做為未來台灣推動房貸保險制度的重要依據。尤其是，與不考慮資本寬容下所推導出的公平保費做比較，有考慮資本寬容之保費相對而言高出許多，此結果與實務相符合。在實務上信用評等越高的保險公司，即越不容易違約的公司(例如：國泰或國華等保險公司)，其貸款人通常支付的保費較高。因此，當經濟突發事件發生(例如：次貸風暴事件)，在法定資本適足率的要求下，導致房貸保險公司信用等級下降並面臨倒閉危機。此時，當貸款人違約時，房貸保險公司能夠支付給銀行的損失降低。因此，在保費收入總現值等於抵押保險預期損失現值下，保險公司索取的保費會降低。若政府採取資本寬容政策，延長抵押保險之經營時間，則房貸保險公司可能轉虧為盈，因而房貸保險公司的違約風險降低。則當貸款人違約時，保險公司能夠支付給銀行的損失增加。因此，在保費收入總現值等於房貸保險預期損失現值之原則下，房貸保險公司索取的保費會增加。

註　　釋

註1：這裡的貸款風險指的是承作房貸保險合約中按保單規定涵蓋的部分。

註2：在2008年3月底，Triad的風險對資本比達到27.7比1(2007年12月底為20.5比1，2007年3月底為13.8比1)，超過法令規定的25比1，由此可以窺見次貸風暴對保險公司營運的巨大衝擊。

註3：例如台北富邦銀行提供的「安世代定期壽險」，針對與金融機構簽訂房屋貸款契約之債務人提供與房貸等值的壽險與意外險(三百萬為限)。若購屋之債務人在房屋貸款期間因意外、疾病等事故，導致無法繳清房貸餘額時，該契約之理賠金可優先償還房貸，減輕家人償還貸款之壓力及避免房子遭法拍之風險，清償房貸後如有餘額，該餘額將給付予所指定的身故保險金受益人(意即第二順位受益人)。

參考文獻

中文部份：

林左裕、柯俊禎、王琮生
2006 〈房貸保險之費率結構研究〉《臺灣土地研究》9(2)：27-52。

Lin, T. C., J. C. Ko & T. S. Wang
2006 "A Study on the Premium Structure of Mortgage Insurance," *Journal of Taiwan Land Research.* 9(2): 27-52.

王昭文
2010 〈考量房價跳躍風險下房屋抵押貸款保險之評價〉《風險管理學報》12(1)：53-68。

Wang, C. W.
2010 "Pricing Mortgage Insurance Contracts with Housing Prices Following Normal Tempered Stable Processes," *Journal of Risk Management.* 12(1): 53-68.

英文部份：

Bardhan, A., R. Karapandža, & B. Urošević
2006 "Valuing Mortgage Insurance Contracts in Emerging Market Economies," *Journal of Real Estate Finance and Economics.* 32: 9-20.

Canner, G. B. & W. Passmore
1994 "Private Mortgage Insurance," *Federal Reserve Bulletin.* 9: 883-899.

Chen, M. C., C.C. Chang, S. K. Lin & S.D. Shyu
2010 "Estimation of Housing Price Jump Risks and their Impact on the Valuation of Mortgage Insurance Contracts," *Journal of Risk and Insurance.* 77(2): 399-422.

Dennis, B., C. Kuo & T. Yang
1997 "Rationales of Mortgage Insurance Premium Structures," *Journal of Real Estate Research.* 14(3): 359-378.

Hendershott, P. & R. Van Order
1987 "Pricing Mortgages: Interpretation of the Models and Results," *Journal of Financial Services Research.* 1(1): 19-55.

Kane, E. J.
1986 "Appearance and Reality in Deposit Insurance-The Case for Reform," *Journal of Banking and Finance.* 10: 175-188.

Kau, J. & D. Keenan
1995 "An Overview of the Option-theoretic Pricing of Mortgages," *Journal of Housing Research.* 6(2): 217-244.

Kau, J. & D. Keenan
1996 "An Option-theoretic Model of Catastrophes Applied to Mortgage Insurance," *Journal of Risk and Insurance.* 63(4):639-656.

Kau, J. & D. Keenan

1999 “Catastrophic Default and Credit Risk for Lending Institutions,” *Journal of Financial Services Research.* 15(2): 87-102.

Kau, J., D. Keenan, W. Muller & J. Epperson
1992 “A Generalized Valuation Model for Fixed-rate Residential Mortgages,” *Journal of Money, Credit and Banking.* 24: 280-299.

Kau, J., D. Keenan & W. Muller
1993 “An Option-based Pricing Model of Private Mortgage Insurance,” *Journal of Risk and Insurance.* 60(2): 288-299.

Kau, J., D. Keenan, W. Muller & J. Epperson
1995 “The Valuation at Origination of Fixed-rate Mortgages with Default and Prepayment,” *Journal of Real Estate Finance and Economics.* 11: 3-36.

Lee, S., C. J. Lee & M. Yu
2005 “Bank Capital Forbearance and Valuation of Deposit Insurance,” *Canadian Journal of Administrative Science.* 22: 220-229.

Merton, R. C.
1977 “An Analytic Derivation of the Cost of Deposit Insurance and Loan Guarantee,” *Journal of Banking and Finance.* 1: 3-11.

Nagarajan, S. & C. W. Sealey
1995 “Forbearance, Prompt Closure, and Incentive Compatible Bank Regulation,” *Journal of Banking and Finance.* 19: 1109-1130.

Ronn, E. & A. Verma
1986 “Pricing Risk-adjusted Deposit Insurance: An Option-based Model,” *Journal of Finance.* 41: 871-895.

Schwartz, E. S. & W. N. Torous
1993 “Mortgage Prepayment and Default Decisions: A Poisson Regression Approach,” *Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association*, 21: 431-449.

附件一

房價、資產與負債之動態過程設定

假設三個資產的動態過程如下：

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = (\mu_H - \delta)\,dt + \hat{\sigma}_H \cdot dW_H(t)\text{，} \tag{A.1}$$

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \mu_A\,dt + \hat{\sigma}_A \cdot dW(t)\text{，} \tag{A.2}$$

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \mu_L\,dt + \hat{\sigma}_L \cdot dW(t)\text{；} \tag{A.3}$$

其中 $W(t) = \left[W_H(t), W_A(t), W_L(t)\right]'$ ； $\hat{\sigma}_H = \tilde{\sigma}_H[1,0,0]'$ ； $\hat{\sigma}_A = \tilde{\sigma}_A[a_{21}, a_{22}, 0]$ ； $\hat{\sigma}_L = \tilde{\sigma}_L[a_{31}, a_{32}, a_{33}]'$ ； $\tilde{\sigma}_H$ 、 $\tilde{\sigma}_A$ 與 $\tilde{\sigma}_L$ 分別為三個資產報酬率之波動度。本文假設 三個單維度之布朗運動 $W_H(t)$ 、 $W_A(t)$ 以及 $W_L(t)$ 彼此間相關。因此，將三資產之動態過程分解如下：

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = (\mu_H - \delta)\,dt + \tilde{\sigma}_H dW_H(t)\text{，}$$

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \mu_A\,dt + a_{21}\tilde{\sigma}_A dW_A(t) + a_{22}\tilde{\sigma}_A dW_H(t)\text{，}$$

$$\frac{dL(t)}{L(t)} = \mu_L\,dt + a_{31}\tilde{\sigma}_L dW_H(t) + a_{32}\tilde{\sigma}_L dW_A(t) + a_{33}\tilde{\sigma}_L dW_L(t)$$

運用 $Var\left[dA(t)/A(t)\right]$ 以及 $Cor\left[dH(t)/H(t), dA(t)/A(t)\right]$ 兩條式子可分別求解 a_{21} 與 a_{22} 如下：

$$Var\left[\frac{dA(t)}{A(t)}\right] \equiv \sigma_A^2\,dt = (a_{21})^2\sigma_A^2 dt + (a_{22})^2\sigma_A^2\,dt\text{，} \tag{A.4}$$

$$Cor\left[\frac{dH(t)}{H(t)}, \frac{dA(t)}{A(t)}\right] \equiv \rho_{AH} = \frac{Cov\left[\sigma_H\,dW_H(t),\ a_{21}\sigma_A\,dW_H(t) + a_{22}\sigma_A\,dW_A(t)\right]}{\sqrt{\mathrm{var}\left[\frac{dH(t)}{H(t)}\right]\mathrm{var}\left[\frac{dA(t)}{A(t)}\right]}}$$

$$= \frac{\sigma_H a_{21}\sigma_A}{\sigma_H\sqrt{(a_{21})^2\sigma_A^2 + (a_{22})^2\sigma_A^2}} = \frac{\sigma_H a_{21}\sigma_A}{\sigma_H\sigma_A^2\sqrt{(a_{21})^2 + (a_{22})^2}} \tag{A.5}$$

因此，由 (A.4) 與 (A.5) 可求得： $a_{21} = \rho_{AH}$ 且 $a_{22} = \sqrt{1-a_{21}^2} = \sqrt{1-\rho_{AH}^2}$ 。

運用相似推導，給定 $Var\left[dL(t)/L(t)\right] = \sigma_L^2\,dt$ 、 $Cor\left[dA(t)/A(t), dL(t)/L(t)\right] \equiv \rho_{AL}$ 以及 $Cor\left[dH(t)/H(t), dL(t)/L(t)\right] \equiv \rho_{LH}$ 下，可求解出

$$a_{31}=\rho_{LH} \text{ 、 } a_{32}=\frac{\rho_{LA}-\rho_{AH}\rho_{LH}}{\sqrt{1-\rho_{AH}^2}} \text{ 、 } a_{33}=\sqrt{1-\rho_{LH}^2-(\frac{\rho_{LA}-\rho_{AH}\rho_{LH}}{\sqrt{1-\rho_{AH}^2}})^2}$$

因此，三個資產之動態過程可改寫如下：

$$\frac{dH(t)}{H(t)}=(\mu_H-\delta)\,dt+\hat{\sigma}_H\cdot dW_H(t)$$

$$\frac{dA(t)}{A(t)}=\mu_A\,dt+\tilde{\sigma}_A\left[\rho_{AH}\,dW_H(t)+\sqrt{1-\rho_{AH}^2}\,dW_A(t)\right]$$

$$=\mu_A\,dt+\left[\phi_{AH}\,dW_H(t)+\sigma_A\,dW_A(t)\right]$$

其中，$\phi_{AH}=\tilde{\sigma}_A\ \rho_{AH}$ ，$\sigma_A=\tilde{\sigma}_A\sqrt{1-\rho_{AH}^2}$ 。

$$\frac{dL(t)}{L(t)}=\mu_L\,dt+\tilde{\sigma}_L\left[\rho_{LH}dW_H(t)+\frac{\rho_{LA}-\rho_{AH}\rho_{LH}}{\sqrt{1-\rho_{AH}^2}}dW_A(t)+\sqrt{1-\phi_{LH}^2-\phi_{LA}^2}\,dW_L(t)\right]$$

$$=\mu_L\,dt+\left[\phi_{LH}dW_H(t)+\phi_{LA}\,dW_A(t)+\sigma_L\,dW_L(t)\right]$$

其中，$\phi_{LH}=\tilde{\sigma}_L\rho_{LH}$ 、$\phi_{LA}=\tilde{\sigma}_L\frac{\rho_{LA}-\rho_{AH}\rho_{LH}}{\sqrt{1-\rho_{AH}^2}}$ 且 $\sigma_L=\tilde{\sigma}_L\sqrt{1-\phi_{LH}^2-\phi_{LA}^2}$ 。

附件二

情況一 $C_1(t_i)$ 之封閉解推導

房貸保險契約之報酬型式如下：

$$MIC(0)=\sum_{i=1}^{N}P(t_{i-1}<\tau\le t_i)\left(\sum_{j=1}^{6}e^{-rt_i}E_Q\left[C_j(t_i)\right]\right) \quad \text{(B.1)}$$

令 $C_i=\sum_{j=1}^{6}e^{-rt_i}E_Q\left[C_j(t_i)\right]$，因此 (B.1) 式可改寫成

$$MIC(0)=\sum_{i=1}^{N}P(t_{i-1}<\tau\le t_i)\left(\sum_{j=1}^{6}e^{-rt_i}E_Q\left[C_j(t_i)\right]\right)=\sum_{i=1}^{N}(e^{-\lambda t_{j-1}}-e^{-\lambda t_j})\left(\sum_{j=1}^{6}e^{-rt_i}E_Q\left[C_j(t_i)\right]\right)$$因

此，針對 $C_1(t_i)$ 之推導如下：$C_1(t_i)=L_R B(t_i)1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge q\right\}}=L_R B(t_i)1_{\{H(t_i)\le K_{1i},F(t_i)\ge q\}}$

在風險中立測度 Q 之下，資產負債價值比例 $F(t_i)\equiv A(t_i)/L(t_i)$ 以及房價 $H(t_i)$ 動態過程公式如下：

$$\ln F(t_i)=\ln F(0)+(-\sigma_L\cdot(\sigma_A-\sigma_L)-\frac{1}{2}\left|\sigma_A-\sigma_L\right|^2)t_i+(\sigma_A-\sigma_L)\cdot W^Q(t_i)\text{，}$$

$$\ln H(t_i)=\ln H(0)+(r-\frac{1}{2}\left|\sigma_H\right|^2)t_i+\sigma_H\cdot W^Q(t_i)\text{，}$$

因此，

$$e^{-rt_i}E_Q(C_1(t_i))=L_R B(t_i)e^{-rt_i}N_2\left(\frac{-\left(\ln\left(\frac{H(t_i)}{K_{1i}}\right)+(r-\frac{1}{2}\left|\sigma_H\right|^2)t_i\right)}{\left|\sigma_H\right|\sqrt{t_i}},\right.$$

$$\left.\frac{\ln\left(\frac{A(0)}{qL(0)}\right)-(\sigma_L\cdot(\sigma_A-\sigma_L)+\frac{1}{2}\left|\sigma_A-\sigma_L\right|^2)t_i}{\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i}},\rho_1\right)$$

$$=L_R B(t_i)e^{-rt_i}N_2\left(\frac{-\left(\ln\left(\frac{H(t_i)}{K_{1i}}\right)+(r-\frac{1}{2}\left|\sigma_H\right|^2)t_i\right)}{\left|\sigma_H\right|\sqrt{t_i}},\right.$$

$$\left.\frac{\ln\left(\frac{A(0)}{qL(0)}\right)+(-\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L+\tilde{\sigma}_L^2-\frac{1}{2}\left|\sigma_{AL}\right|^2)t_i}{\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i}},\rho_1\right)$$

$$=L_R B(t_i)e^{-rt_i}N_2\left(-d_2^{1,i},e_2^{2,i},\rho_1\right)$$

其中

$$\rho_1 = \frac{-\sigma_H \cdot (\sigma_A - \sigma_L)}{|\sigma_H||\sigma_{AL}|} = \frac{-\rho_{AH}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_H + \rho_{HL}\tilde{\sigma}_H\tilde{\sigma}_L}{\tilde{\sigma}_H\sigma_{AL}},$$

$$|\sigma_{AL}|^2 \equiv |\sigma_A - \sigma_L|^2 = \tilde{\sigma}_A^2 - 2\rho_{AL}\tilde{\sigma}_A\tilde{\sigma}_L + \tilde{\sigma}_L^2 \text{。}$$

附件三

情況二 $C_2(t_i)$ 之封閉解推導

$$C_2(t_i+\tau) = L_R B(t_i)e^{c\tau} 1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\theta\le\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\le q,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\ge g\right\}}$$

$$+L_R B(t_i)e^{c\tau} 1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\theta\le\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\le q,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}< g\right\}} = C_{21}(t_i+\tau) + C_{22}(t_i+\tau) \text{。}$$

其中

$$C_{21}(t_i+\tau) = L_R B(t_i)e^{c\tau} 1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\theta\le\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\le q,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\ge g\right\}}$$

$$= L_R B(t_i)e^{c\tau}\left[1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge\theta,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\ge g\right\}} - 1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge q,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\ge g\right\}}\right]$$

$$= -L_R B(t_i)e^{c\tau}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k 1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge l_k,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\ge g\right\}}$$

因此，

$$e^{-rt_i}E_Q(C_{21}(t_i)) = e^{-r(t_i+\tau)}E_Q(C_{21}(t_i+\tau))$$

$$= e^{c\tau}e^{-r(t_i+\tau)}E_Q\left(-L_R B(t_i)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k 1_{\left\{H(t_i)\le K_{1i},\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge l_k,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\ge g\right\}}\right)$$

$$= -L_R B(t_i) e^{c\tau} e^{-r(t_i+\tau)} \sum_{k=1}^{2} (-1)^k N_3 \left(\frac{-\left(\ln\left(\frac{H(t_i)}{K_{1i}} \right) + (r - \frac{1}{2}\left|\sigma_H\right|^2) t_i \right)}{\left|\sigma_H\right| \sqrt{t_i}} , \right.$$

$$\left. \frac{\ln\left(\frac{A(0)}{l_k L(0)} \right) - (\sigma_L \cdot (\sigma_A - \sigma_L) + \frac{1}{2}\left|\sigma_A - \sigma_L\right|^2) t_i}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i}}, \frac{\ln(\frac{A(0)}{g\,L(0)}) - (\sigma_L \cdot (\sigma_A - \sigma_L) + \frac{1}{2}\left|\sigma_A - \sigma_L\right|^2)(t_i + \tau)}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i + \tau}}, \Sigma_i \right)$$

$$= -L_R B(t_i) e^{c\tau} e^{-r(t_i+\tau)} \sum_{k=1}^{2} (-1)^k N_3 \left(-d_2^{1,i}, e_2^{k,i}, f_2^i, \Sigma_i \right)$$

其中

$$f_2^i = \frac{\ln(\frac{A(0)}{g\,L(0)}) - (\sigma_L \cdot (\sigma_A - \sigma_L) + \frac{1}{2}\left|\sigma_A - \sigma_L\right|^2)(t_i + \tau)}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i + \tau}}$$

$$= \frac{\ln(\frac{A(0)}{gL(0)}) + (-\rho_{AL} \tilde{\sigma}_A \tilde{\sigma}_L + \tilde{\sigma}_L^2 - \frac{1}{2}\left|\sigma_{AL}\right|^2)(t_i + \tau)}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i + \tau}} \quad ;$$

Σ_i 之定義如下：

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{i12} & \rho_{i13} \\ & 1 & \rho_{i23} \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_{i12} = -E\left(\frac{\sigma_H \cdot W^R(t_i)}{\left|\sigma_H\right| \sqrt{t_i}}, \frac{(\sigma_A - \sigma_L) \cdot W^R(t_i)}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i}} \right) = \frac{-\sigma_H (\sigma_A - \sigma_L)}{\left|\sigma_H\right| \left|\sigma_{AL}\right|} = \rho_1 \ ,$$

$$\rho_{i13} = -E\left(\frac{\sigma_H \cdot W^R(t_i)}{\left|\sigma_H\right| \sqrt{t_i}}, \frac{(\sigma_A - \sigma_L) \cdot W^R(t_i + \tau)}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i + \tau}} \right) = -\frac{\sigma_H (\sigma_A - \sigma_L)}{\left|\sigma_H\right| \left|\sigma_{AL}\right|} \sqrt{\frac{t_i}{t_i + \tau}} = \rho_1 \sqrt{\frac{t_i}{t_i + \tau}} \ ,$$

$$\rho_{i23} = -E\left(\frac{(\sigma_A - \sigma_L) \cdot W^R(t_i)}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i}}, \frac{(\sigma_A - \sigma_L) \cdot W^R(t_i + \tau)}{\left|\sigma_{AL}\right| \sqrt{t_i + \tau}} \right) = \sqrt{\frac{t_i}{t_i + \tau}} \ 。$$

同理

$$C_{22}(t_i+\tau)=-L_R B(t_i)e^{c\tau}\,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k 1_{\left\{H(t_i)\le K_{1i},\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge l_k,\frac{A(t_i+\tau)}{L(t_i+\tau)}<g\right\}}\text{ 。}$$

因此

$$e^{-rt_i}E_Q(C_{22}(t_i))=e^{-r(t_i+\tau)}E_Q(C_{22}(t_i+\tau))$$

$$=-L_R B(t_i)e^{c\tau}\,\frac{A(0)}{L(0)}\exp(-(r+\sigma_L(\sigma_A-\sigma_L)(t_i+\tau))\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\times$$

$$N_3\left(\frac{\ln\left(\frac{H(0)}{K_{1i}}\right)+(r+\sigma_H\cdot(\sigma_A-\sigma_L)-\frac{1}{2}\left|\sigma_H\right|^2)t_i}{\left|\sigma_H\right|\sqrt{t_i}},\frac{\ln\left(\frac{A(0)}{l_k L(0)}\right)-(\sigma_L\cdot(\sigma_A-\sigma_L)-\frac{1}{2}\left|\sigma_A-\sigma_L\right|^2)t_i}{\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i}},\right.$$

$$\left.\frac{\ln\left(\frac{A(0)}{g L(0)}\right)-(\sigma_L\cdot(\sigma_A-\sigma_L)-\frac{1}{2}\left|\sigma_A-\sigma_L\right|^2)(t_i+\tau)}{\left|\sigma_{AL}\right|\sqrt{t_i+\tau}},\bar{\Sigma}_i\right)$$

$$=-L_R B(t_i)e^{c\tau}\,\frac{A(0)}{L(0)}\exp(-(r+\sigma_L(\sigma_A-\sigma_L)(t_i+\tau))\sum_{k=1}^{2}(-1)^k N_3(-(d_2^{1,i}+a\sqrt{t_i}),e_1^{k,i},f_1^i,\bar{\Sigma}_i)\text{ 。}$$

故，$e^{-rt_i}E_Q(C_2(t_i))=-L_R B(t_i)e^{c\tau}e^{-r(t_i+\tau)}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k N_3\left(-d_2^{1,i},e_2^{k,i},f_2^i,\Sigma_i\right)$

$$-L_R B(t_i)e^{c\tau}\,\frac{A(0)}{L(0)}\exp\left(-(r+\sigma_L(\sigma_A-\sigma_L)(t_i+\tau)\right)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k N_3\left(-(d_2^{1,i}+a\sqrt{t_i}),e_1^{k,i},f_1^i,\bar{\Sigma}_i\right)$$

附件四

情況三 $C_3(t_i)$ 之封閉解推導

$$C_3(t_i)=L_R B(t_i)\frac{A(t_i)}{L(t_i)}1_{\left\{H(t_i)\le(1-L_R)B(t_i),\frac{A(t_i)}{L(t_i)}<\theta\right\}}=L_R B(t_i)\frac{A(t_i)}{L(t_i)}1_{\{H(t_i)\le k_{1i},F(t_i)<\theta\}}$$

其推導過程如同附件二與附件三。

附件五

情況四 $C_4(t_i)$ 之封閉解推導

$$C_4(t_i) = (B(t_i) - H(t_i))1_{\left\{(1-L_R)B(t_i)\le H(t_i)\le B(t_i),\frac{A(t_i)}{L(t_i)}\ge q\right\}}$$

其推導過程如同附件一。

附件六

情況五 $C_5(t_i)$ 之封閉解推導

其推導過程如同附件一與附件二。

附件七

情況六 $C_6(t_i)$ 之封閉解推導

$$e^{-rt_i}E_Q(C_6(t_i))$$

$$= e^{-rt_i}E_Q\left(B(t_i)F(t_i)\sum_{h=1}^{2}(-1)^h 1_{\{H(t_i)\le K_{hi},F(t_i)<\theta\}}\right) - e^{-rt_i}E_Q\left(H(t_i)F(t_i)\sum_{h=1}^{2}(-1)^h 1_{\{H(t_i)\le K_{hi},F(t_i)<\theta\}}\right)$$

其推導過程與附件一與附件三。