

學術論著

# 考量房價與利率關係的不動產逆向抵押貸款定價： 利用最大熵原則

## Pricing Reverse Mortgage under the Relationship between Housing Price and Interest Rate: Using the Principle of Maximum Entropy

王文楷\*

Wen-Kai Wang\*

### 摘 要

本文利用Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)所發展之房價與利率模型，探討RM定價問題。與其它文獻不同，此模型房價與利率之間的關係，因當前利率大小而不同，此特性和傳統模型中相關性維持不變有所不同。另外本文說明如何利用最大熵原則(the principle of maximum entropy)，求解風險中立機率。此方法與其它求解風險中立機率的方法如Girsanov轉換相比，較為簡單。最後本文利用實證資料，分析不同參數對RM的影響。實證結果顯示，房價與利率之間的關係的確隨著當前利率大小而變動，而非固定維持正相關或負相關。本文也提供不同參數對RM年金的影響，供政府和貸方做為RM政策或年金制定時的參考方向。

關鍵詞：不動產逆向抵押貸款、風險中立機率、最大熵原則

### ABSTRACT

This paper takes advantage of the model in Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018), which accounts for housing prices and interest rates. The model is different from others that the relationship between housing prices and interest rates depends on the value of the current interest rate. In addition, this paper introduces how to derive a risk-neutral probability measure by means of the principle of maximum entropy. The technique is more mathematically tractable, which is different from other methods used to derive risk-neutral probability measures, such as the Girsanov's transformation. Finally, empirical data is adopted to study the effects of different factors on the value of a RM. The empirical results show that the relationship between housing prices and interest rates indeed varies according to the value of the current interest rate, instead of maintaining positive or negative correlation. This paper also provides the effects of different factors on the annuity of RM, which contributes to policy decisions and determining annuities of RMs.

**Key words: reverse mortgage, risk-neutral probability measure, the principle of maximum entropy**

(本文於2021年9月13日收稿，2022年1月27日審查通過，實際出版日期2023年6月)

\* 國立高雄大學金融管理學系副教授

Associate Professor, Department of Finance, National University of Kaohsiung, Taiwan  
E-mail: wkwang@nuk.edu.tw

## 一、前言與文獻介紹

近年來全世界皆面對少子化與人口高齡化的挑戰，台灣的生育率更在全世界國家中敬陪末座。部分文獻如：Hsu(2017)和Huang et al.(2019)，提到人口高齡化的問題對國家勞動力和經濟成長的影響。除此之外，人口高齡化也是重要的社會福利問題。由於獨居長者可能面臨膝下無子女的狀況，即便擁有房產，但變現不易或出租困難，且因退休失去穩定現金流，造成生活上的負擔。為因應此情形，台灣自2013年3月1日開始試辦RM，至今已有多家金融機構推出相關類型的產品。根據金融監督管理委員會銀行局資料顯示，銀行辦理商業型RM的件數從2015年12月底的核貸件數12件，快速成長至2021年6月底的5212件(註1)，足見國人對此類商品的接受度和使用度快速上升，而RM發展至今已出現不同類型的商品。例如年金領取方式的不同，有一次性全額領取、定期年金領取、或是終身年金領取。而抵押房產方面，則可能有貸方取得房產，或是繼承人取得房產剩餘價值。

有關國內探討RM政策的相關文獻已有不少，例如：林左裕(2011)、王健安、張金鶚(2016)以及吳明哲(2018)等，且近年國人對RM的接受度有明顯上升，但因為RM的存續期間可能較長，在定價上須考量因素較多，而造成定價上的困難，而不合理的定價也可能降低借貸兩方的意願。RM的定價可回溯到1990年代，Tse(1995)從貸方的角度分析RM所提供之年金。在該文獻中，房價升值率、死亡率皆假設為常數，而利率則分為常數和隨機兩種情況。由於RM具備衍生性商品性質，其中之一的標的物資產即為房價，因此在Tse(1995)中假設房價無隨機性，並非適當假設。由於Black & Scholes(1973)對衍生性商品定價的突破性發展，在房價的假設上，不少文獻也採用Black & Scholes(1973)中的幾何布朗運動(geometric Brownian motion, GBM)的假設，例如：Bardhan et al.(2006)、Wang et al.(2007)、陳勤明等(2017)、王文楷(2019)等。

在房價為GBM且利率為常數的假設下，RM的定價問題可能存在封閉解，例如陳勤明等(2017)和王文楷(2019)皆提供RM定價公式。然而由於RM合約存續期間較長的原因，使得在定價時對利率假設為常數不甚合理。因此部分文獻除隨機房價外，也加入隨機利率的因素。例如Lee et al.(2012)假設房價滿足加入隨機跳躍的對數常態分配(log-normal distribution with jumps)，而利率滿足Cox-Ross-Ingersoll過程(CIR process)。在利用蒙地卡羅法(Monte Carlo method)模擬利率下，作者提供RM的定價公式封閉解，並指出RM合理的年金受到房價不確性影響較大。而Shao et al.(2015)則利用向量自迴歸模型(vector-auto-regression model, VAR model)模型化房價和利率，並且死亡率為隨機。作者發現房價中的獨特性風險(idiosyncratic risk)和死亡率對RM定價影響較大，因此利用平均房價指標定價RM可能造成低估風險所帶來的影響。Cho et al.(2015)在房價和利率皆假設為隨機，並且死亡率滿足Gompertz(1825)的模型之下，分別對三種年金領取方式：一次性支付、固定年金、隨通膨成長年金，進行RM定價分析。作者使用澳洲的實證資料以及蒙地卡羅法，發現一次性領取方式，對貸方利潤最高，並且風險低於另外兩種方式。

上述介紹的文獻所採用的定價模型並非同一類型，在標的物的假設上，部分文獻採用計量模型(econometric model)，例如：Maplezzi(1999)、Gallin(2006)、Eerola & Lyyikinen(2015)，而Bardhan et al.(2006)、Wang et al.(2007)、陳勤明等(2017)、王文楷(2019)等則是利用隨機微分

方程(stochastic differential equation)。Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)指出利用隨機微分方程在解釋標的物時，只需要納入主要因素，相對而言，較不依賴解釋變數個數提升正確度。另一方面，過去利用隨機微分方程的文獻在房價和利率的假設上，多以房價為對數常態或加入跳躍的對數常態為主，而房價與利率之間的關係則由兩者的相關係數呈現，若房價和利率兩者之間關係較明顯時，這樣的假設可能無法捕抓到此現象。因此作者對 $t$ 時的房價 $x(t)$ 和利率 $r(t)$ 的一般模型假設為：

$$dx(t) = f_1(x(t), r(t))dt + f_2(x(t))dW_x(t), \dots \quad (1)$$

和

$$dr(t) = f_3(r(t))dt + f_4(r(t))dW_r(t), \dots \quad (2)$$

其中 $f_i(\cdot)$ 為適當的函數、 $W_x(t)$ 和 $W_r(t)$ 為兩個相關的Wiener過程。若(1)式中 $f_1(x, r)$ 與 $r$ 無關，則與上述過去文獻的假設一致，因此式(1)和式(2)更加一般化。

由於無套利原則的因素，RM定價需要使用風險中立機率，傳統的方法多採用Girsanov(1960)的方法進行測度轉換。然而在較為複雜的模型下，會造成使用Girsanov轉換的難度較高。Wang(2000)發展另一種測度轉換的方式，Wang(2000)的轉換在使用上需要風險的市場價格(market price of risk)，以及標的物的累積分配函數或是機率質量函數。然而若模型較為複雜，未必能得知標的物為何種隨機變數，而風險的市場價格也可能難以取得。Li et al.(2019)利用Kogure & Kurachi(2010)和Li(2010)所介紹的最大熵原則轉換風險中立機率進行RM定價，作者說明此方法可搭配不同的模擬方式，如蒙地卡羅法，而數學上則為微積分的最佳化問題，在求解上較為容易，因此有相當大的優勢和彈性。另一個和Wang(2000)的轉換不同之處，在於此方法可直接利用風險中立機率定義，無須利用風險的市場價格。

本文主要貢獻如下：我們利用Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)提出的房價和利率模型，搭配Li et al.(2019)的做法，利用最大熵原則求解風險中立機率。相較於過去文獻多利用房價和利率的不確定性之間的相關性，Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)的模型在房價和利率之間關係較明顯時，更能捕抓到兩者之間的關係。另外在此模型中，房價和利率的關係會因利率大小而不同。利用此模型，我們分析不同現象下，如房價平均報酬率和利率均數等，對RM年金的影響。我們找出對RM年金影響較大的因素，提供政府或貸方對RM政策或年金制訂時，應考慮的因素或可參考的方向。

本文撰寫結構如下：第二節介紹Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)所提出的房價與利率模型對進行RM定價，以及如何使用最大熵原則進行風險中立機率求解。第三節提供建議如何求解風險中立機率。第四節介紹使用的實證資料，以及敏感度分析的結果。最後第五節提供本文的結論。

## 二、RM定價模型與最大熵原則

部分文獻，如：Shi et al.(2014)、Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)和Hanck & Prser(2020)，提出房價 $x(t)$ 和利率 $r(t)$ 之間呈現相關性。加上RM的合約終止日未知且可能長達數年，因此在定

價RM時，除房價外也應考慮利率的隨機因素。Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)在式(1)和式(2)的一般模型上，進一步選擇適當的飄移項(drift term)和波動度項(volatility term)，得到下列式(3)和式(4)，本節各參數說明亦可參考附錄表九。Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)對瞬間房價報酬率，即 $\frac{dx(t)}{x(t)}$ ，假設其平均年化後為利率 $r(t)$ 的線性函數： $\lambda(\mu - r(t))$ 。根據其假設，該線性函數對利率 $r(t)$ 微分後得到 $-\lambda$ ，因此 $-\lambda$ 可解釋為瞬間房價報酬率對利率之敏感程度，其絕對值越大代表瞬間房價報酬率隨利率變動越大。而將 $r(t) = 0$ 代入該線性關係後，發現 $\lambda\mu$ 為該線性函數之截距。並且根據該線性關係，可得到在 $\lambda > 0$ 且 $\mu > r(t)$ 時，房價平均上呈現上升， $\mu < r(t)$ 時則呈現下降，而 $\lambda < 0$ 時則與前述情況相反。因此房價與利率並非維持不變的正負向關係，而是依當前利率大小而不同。另一方面，房價波動度被假設為常數 $\sigma > 0$ 。在利率 $r(t)$ 方面，Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)則是利用Vasicek模型，其中 $\kappa$ 為利率均數回歸速度，而 $\theta$ 為利率均數水準， $\eta$ 則為利率波動參數，與波動大小為正向關係。此模型之特色為具有均數回歸現象，當 $\kappa$ 值越大時，利率多在 $\theta$ 附近變動，並且允許負利率的發生。對於房價 $x(t)$ 和利率 $r(t)$ 的隨機性皆利用Wiener過程呈現，並且兩者之間的相關係數為 $\rho \in [-1,1]$ 。Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)的模型如下：

$$dx(t) = \lambda(\mu - r(t))x(t)dt + \sigma x(t)dW_x(t), \dots\dots\dots (3)$$

和

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \eta dW_r(t), \dots\dots\dots (4)$$

其中 $\lambda > 0$ 、 $\mu > 0$ 、 $\sigma > 0$ 、 $\kappa > 0$ 、 $\eta > 0$ ，而 $W_x(t)$ 和 $W_r(t)$ 為兩個Wiener過程。

由式(3)和式(4)，我們可以發現此模型與過去模型一個不同之處，在於不僅僅使用房價和利率不確定性之間的相關性捕捉兩者關係。過去的模型主要利用相關係數 $\rho$ 呈現房價和利率之間的關係，然而若兩者之關係較強時，恐難以僅靠 $\rho$ 捕捉此關係。總結來說，式(3)和式(4)較過去文獻所使用的模型更為一般，有其優勢存在。另一方面，我們利用清華安富房價指數中的全台灣房價指數(註2)和中央銀行所公布的中華郵政兩年期定期存款利率(註3)，將2013年7月至2021年6月共8年的月資料呈現於圖一，我們同時利用最新房價指數將歷史指數單位化。此組實證資料中房價指數和利率之間的相關係數約為-0.69，確實顯示房價與利率之間存在明顯的相關性，因此使用式(3)和式(4)捕捉房價與利率之間的關係有其合理性。最後，為了數學上方便處理，我們利用Cholesky分解以及Euler-Maruyama法，將式(3)和式(4)離散化並改寫為：

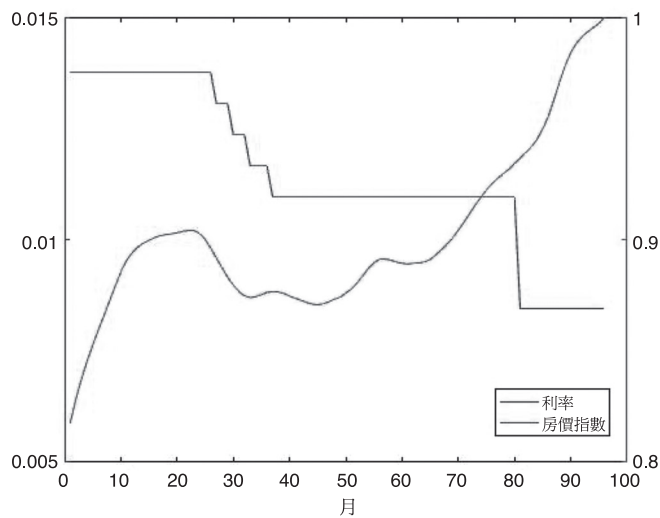
$$x(t + \epsilon) - x(t) = \lambda(\mu - r(t))x(t)\epsilon + \sigma x(t)\sqrt{\epsilon}(\sqrt{1 - \rho^2}Z_x(t) + \rho Z_r(t)), \dots\dots\dots (5)$$

和

$$r(t + \epsilon) - r(t) = \kappa(\theta - r(t))\epsilon + \eta\sqrt{\epsilon}Z_r(t), \dots\dots\dots (6)$$

其中 $Z_x(t)$ 和 $Z_r(t)$ 為兩兩獨立的標準常態分配，且 $\epsilon > 0$ 為離散化每段時間差，其單位為年。

我們現在介紹最大熵原則如何應用於求解風險中立機率。在資訊理論(information theory)中，熵為隨機事件所包含的資訊平均量。若 $\omega$ 為一個隨機事件而 $\mathbb{P}(\omega)$ 為其發生機率，則該隨機



圖一 全台灣房價指數與兩年期定存機動利率之月資料折線圖

事件的熵可定義為 $\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}(\omega)}\right)$ 。因此所有熵的總和為一個隨機變數所包含的資訊量平均，而最大熵總和則可被用於估計隨機變數可能的機率分佈。Kogure & Kurachi(2010)以及Li(2010)皆利用最大熵原則以及Kullback-Leibler散度(Kullback-Leibler divergence)，說明若 $q(x)$ 為隨機變數在風險中立機率測度下的機率質量函數，而 $p(x)$ 為隨機變數在原測度下的機率質量函數，則可藉由求解下列最小化問題：

$$\min_{q(x)} \left\{ \sum_{x \in \Omega} q(x) \ln \left( \frac{q(x)}{p(x)} \right) \right\} \dots\dots\dots (7)$$

並且 $q(x)$ 需滿足風險中立機率之定義，其中 $\Omega$ 為樣本空間。Li(2010)指出上述的做法是在僅有原測度的資訊下，找出最有可能的風險中立機率測度，因此必須加入風險中立機率為定義的限制式，而所求的風險中立機率測度則稱為最大熵測度(maximum entropy measure)或是正準測度(canonical measure)。另一方面，若隨機變數為連續，則式(7)可做對應修改。由於式(7)與限制式組成一個限制型最佳化問題，一般可使用Lagrange乘數法則求解，因此相較於其它求解風險中立機率的方法，在降低數學難度上有一定的優勢。

我們現在說明本文模型的最大熵測度應滿足的最佳化問題，我們的做法是參考Li et al.(2019)。由於我們已將原連續模型式(3)和式(4)離散化為式(5)和式(6)，我們首先利用蒙地卡羅法模擬式(5)和式(6)的樣本路徑共 $N$ 對，每對路徑出現機率為 $\frac{1}{N}$ 。假設 $x_{m,n}$ 和 $r_{m,n}$ 分別為 $t_m = m\epsilon$ 時第 $n$ 對樣本的房價和利率，其中 $m = 0, 1, 2, \dots, M$ 和 $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ，而 $t_M$ 為生物最大年齡(biological maximum lifespan)。若 $q_n$ 為第 $n$ 對樣本路徑的風險中立機率，則我們得到以下問題：

$$\min_{q_1, q_2, \dots, q_N} \left\{ \sum_{n=1}^N q_n \ln \left( \frac{q_n}{\frac{1}{N}} \right) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

在限制式方面，由於借方死亡時間為隨機，因此每一個時間點 $t_m$ 皆有可能是RM合約終止時間。故在所有的 $m = 0, 1, 2, \dots, M$ 時，限制式為：

$$\sum_{n=1}^N q_n e^{-\sum_{i=1}^m r_{i,n}} x_{m,n} = x_0, \dots \dots \dots (9)$$

$$\sum_{n=1}^N q_n e^{-\sum_{i=1}^m r_{i,n}} = B(0, t_m), \dots \dots \dots (10)$$

$$\sum_{n=1}^N q_n = 1, \dots \dots \dots (11)$$

其中 $x_0$ 為起始房價、 $B(0, t_m)$ 為到期日 $t_m$ 時且面額為1元的零息債券價格。特別一提的是限制式共有 $2M + 1$ 條，因此若為求較小誤差，在蒙地卡羅模擬時將時間切割段數提升時，會增加求解風險中立機率的計算繁雜度。

本節最後說明RM定價方式，由於市場上有不同類型的RM合約，本文所討論的為較簡單的固定年金領取方式，並且不可提早解約，而繼承人可選擇償還貸款繼承房產，或是放棄繼承由貸方取得房產。假設借款利率為利率加上一固定利差 $\phi > 0$ ，而借方存活至 $t_m$ 且於 $t_{m+1}$ 死亡的機率為 $\tilde{q}_m$ 。若借方每年領取年金總額為 $\alpha$ ，則以貸方角度而言，RM合約之價值為：

$$\sum_{m=1}^M \tilde{q}_m \sum_{n=1}^N q_n \left[ -\sum_{i=1}^{m-1} e^{-\sum_{j=1}^i r_{j,n}} \alpha \epsilon + e^{-\sum_{j=1}^m r_{j,n}} \min \left\{ x_{m,n}, \sum_{i=1}^{m-1} e^{\sum_{j=i}^{m-1} (r_{j,n} + \phi) \epsilon} \alpha \epsilon \right\} \right]. \dots \dots \dots (12)$$

式(12)解釋如下： $\alpha \epsilon$ 為每 $\epsilon$ 年所領的年金金額，因此 $\sum_{i=1}^{m-1} e^{-\sum_{j=1}^i r_{j,n}} \alpha \epsilon$ 即為第 $n$ 對路徑樣本下，貸方於 $[t_1, t_{m-1}]$ 之間所提供的折現年金總和。另一方面，若借方於 $t_m$ 時死亡，貸方可能獲得房產，或是房產繼承人償還借貸。若 $t_m$ 時房價高(低)於所借貸總金額加利息，則房產繼承人選擇償還借貸(放棄房產)。反之，若 $t_m$ 時房價低於所借貸總金額加利息，則房產繼承人選擇放棄房產。最後對上述各項之和計算期望值，得到RM定價。由於式(12)為計算貸方的期望損益，因此以貸方角度而言，適當的年金 $\alpha$ 應使得式(12)為非負，此時貸方才有意願承辦合約。而使得式(12)為0的年金，可以視為貸方可接受的最大年金。本文之後的分析，皆以最大年金為主。

### 三、求解最大熵測度

本節之目的為建議求解上節模型所得到的最佳化問題，其原因為提高求解效率，以便縮短求解所耗費的時間。上節介紹本文模型中尋找風險中立機率所需要求解的問題，即式(8)至式(11)，此問題為一個Lagrange乘數法則問題。若令：

$$\begin{aligned} & F(q_1, q_2, \dots, q_N, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,M}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \dots, \lambda_{2,M}, \lambda_3) \\ & = \sum_{n=1}^N q_n (\ln q_n + \ln N) + \sum_{m=1}^M \lambda_{1,m} \left( \sum_{n=1}^N q_n e^{-\sum_{i=1}^m r_{i,n}} x_{m,n} - x_0 \right) \dots \dots \dots (13) \\ & \quad + \sum_{m=1}^M \lambda_{2,m} \left( \sum_{n=1}^N q_n e^{-\sum_{i=1}^m r_{i,n}} - B(0, t_m) \right) + \lambda_3 \left( \sum_{n=1}^N q_n - 1 \right), \end{aligned}$$

其中 $\lambda_{1,i}$ 、 $\lambda_{2,i}$ 、 $\lambda_3$ 為Lagrange乘數， $i = 1, 2, 3, \dots, M$ 。因此風險中立機率須滿足 $\nabla F = 0$ ，即臨界點(critical point)的定義。然而，式(13)的臨界點需要利用數值方法求得，例如使用非線性系統求

解的牛頓法(Newton's method)或是最佳化的梯度下降法(gradient descent method)，並且在蒙地卡羅模擬時，時間切割段數越高，計算繁雜度也越高。

若利用如牛頓法(Newton's method)求解式(13)，所需要處理的Hessian矩陣將過大，並且過程中需要計算Hessian矩陣的反矩陣。另一方面，若利用二階偏導數檢測法驗證所求答案是否為最小值，需要驗證Hessian矩陣是否為正定(positive definite)矩陣，在大矩陣下並不容易。為了避開利用二階偏導數檢測法求解式(13)，而使Hessian矩陣過大所造成的問題，我們將式(8)至式(11)的限制型最佳化問題改寫為最小化下列目標函數：

$$G(q_1, q_2, \dots, q_N) = K_0 \sum_{n=1}^N q_n (\ln q_n + \ln N) + \sum_{m=1}^M K_{1,m} \left( \sum_{n=1}^N q_n e^{-\sum_{i=1}^m r_{i,n} \epsilon} x_{m,n} - x_0 \right)^2 + \sum_{m=1}^M K_{2,m} \left( \sum_{n=1}^N q_n e^{-\sum_{i=1}^m r_{i,n} \epsilon} - B(0, t_m) \right)^2 + K_3 \left( \sum_{n=1}^N q_n - 1 \right)^2, \quad (14)$$

其中 $K_0$ 、 $K_{1,m}$ 、 $K_{2,m}$ 、 $K_3$ 均為正數。 $K_0$ 需給定足夠小，而 $K_{1,m}$ 、 $K_{2,m}$ 、 $K_3$ 則給定足夠大。因此在最小化式(14)時，會因為較小的 $K_0$ 以及較大 $K_{1,m}$ 、 $K_{2,m}$ 、 $K_3$ ，而使得原限制型最佳化問題中的限制式(9)至(11)能成立，同時原目標函數式(8)也能被最小化。式(14)可採用梯度下降法(gradient descent method)做數值求解，以避開Hessian矩陣的問題。

最後，由於式(9)至式(11)的限制式數量，因蒙地卡羅模擬所切割的時間段數，以及RM合約可能最長年限而增加。在較高的切割段數，以及模擬路徑數較多的情況下，會增加求解困難度和複雜性。因此我們建議僅使用部分限制式。例如僅採用自合約生效開始前數年所對應的限制式，或是放大相鄰兩限制式的時間點，以降低數值求解所需時間和複雜度。

#### 四、敏感度分析

本節利用實證資料進行敏感度分析，探討不同參數對RM合約最大年金的影響為何，我們由如何估計模型的參數開始。有關第二節中所介紹的模型參數說明，可對照附錄表九。在各年齡在不同年份死亡率的部分，我們採用Lee & Carter(1992)的模型，此模型在許多文獻中也被使用。而在估計式(3)和式(4)參數方面， $\sigma$ 為每期房價報酬率的年化標準差，而 $\eta$ 則為每期利率差的年化標準差。在 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\kappa$ 、 $\theta$ 的部分，則利用最小平方法，求解下列最小化問題：

$$\min_{\lambda, \mu} \left\{ \sum_{t \in \mathcal{T}} \left[ \frac{x(t+\epsilon') - x(t)}{x(t)} - \lambda(\mu - r(t))\epsilon' \right]^2 \right\}, \quad (15)$$

和

$$\min_{\kappa, \theta} \left\{ \sum_{t \in \mathcal{T}} [(r(t + \epsilon') - r(t)) - \kappa(\theta - r(t))\epsilon']^2 \right\}, \quad (16)$$

其中 $\epsilon' > 0$ 為相鄰兩筆資料的年化時間差、 $\mathcal{T}$ 為使用資料的所有時間點扣除最近期時間點的集合。參數 $\rho$ 則是利用 $\frac{x(t+\epsilon') - x(t)}{x(t)} - \lambda(\mu - r(t))\epsilon'$ 和 $\frac{(r(t+\epsilon') - r(t)) - \kappa(\theta - r(t))\epsilon'}{\eta\sqrt{\epsilon'}}$ 兩組資料的相關係數估計求得。最後，我們根據上述方式估計模型參數後，利用蒙地卡羅法模擬房價和利率的樣本路徑共10,000對。由於式(5)並未加入房產折舊率，在利用最大熵原則求得風險中立機率後，我們將利用模擬房價乘上連續折舊因子 $e^{-\delta \epsilon}$ ，其中 $\delta \geq 0$ 為房產折舊率。

我們現在介紹本文使用的實證資料。首先，生存率和死亡率是利用Human Mortality Database中的台灣資料進行估計。而房價則以第二節中使用的清華安富全台灣房價指數，再轉換為房價，即：

$$\text{未來房價} = \text{當前房價} \times \frac{\text{未來指數}}{\text{當前指數}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

該指數由安富財經科技股份有限公司與國立清華大學安富金融工程研究中心共同設計，除台東縣因交易量不足外，其它各縣市皆有公布每月房價指數，具有相當參考價值。而利率方面，我們採用中華郵政兩年期定存的機動利率。房價指數和利率皆為月資料，期限從2013年7月至2021年6月止共8年。另外，由於未來房價由式(17)計算，我們利用當前房價指數將原房價指數單位化，即當前房價時間為基期並且指數為1。最後，未來各時間點的零息債券價格，本文僅利用合約生效前兩年資料做為風險中立機率求解限制式，因此我們以2021年所發行的2年期的中央建設公債甲類所換算的零息債券利率，估算兩年內各時間點的零息債券價格。

表一 利用實證資料所估計的式(5)和式(6)模型參數

瞬間房價報酬率平均對利率敏感程度負數、 $\lambda$	瞬間房價報酬率平均對利率線性關係參數、 $\mu$	房價波動度、 $\sigma$	利率均數回歸速度、 $\kappa$	利率均數水準、 $\theta$	利率波動參數、 $\eta$	房價與利率不確定性相關係數、 $\rho$
2.4052	0.0211	0.0119	0.0894	0.0040	0.0010	0.1109

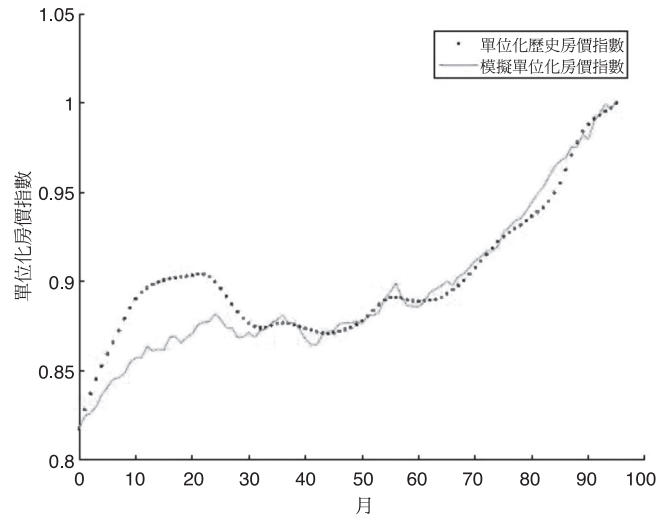
表二 其它使用參數

起始抵押房產價值、 $x_0$	蒙地卡羅模擬每段時間、 $\epsilon$	生物最大年齡、 $t_m$	貸款利差、 $\phi$	房屋折舊率、 $\delta$
10,000,000元	年	110歲	1%	3%

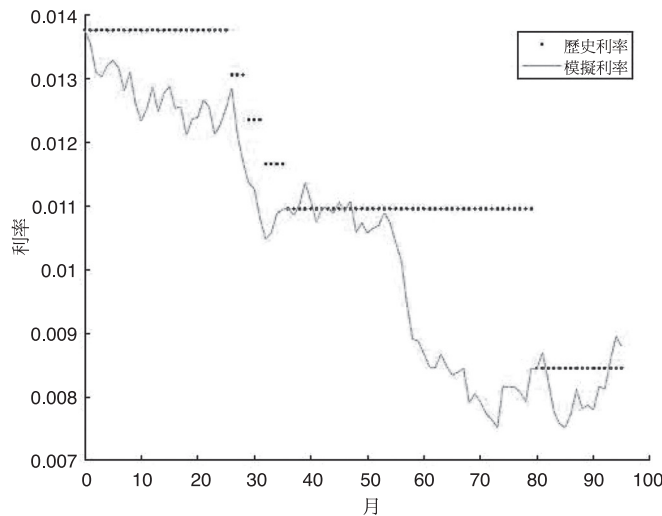
表一呈現利用2013年7月至2021年6月止共8年的實證資料所估計的模型參數。從該組參數可看出， $\lambda > 0$ 代表房價報酬率因高利率而呈現上升趨緩或下降趨勢，當利率低於 $\mu = 0.0211$ 時，房價指數平均上呈現上升；反之利率高於 $\mu = 0.0211$ 時，房價指數平均上呈現下降。而利率在高於 $\theta = 0.0040$ 時，大抵上呈現下降趨勢。而利率在低於 $\theta = 0.0040$ 時，大抵上呈現上升趨勢。因此，只有在足夠高的利率下，即 $r(t) > \mu$ ，平均房價才會出現下跌的現象。換言之，房價與利率並未呈現絕對的正負相關性，而是以利率大小決定。本文將以調整參數進行敏感度分析，觀察不同參數下的RM提供最大年金變化。借款人年齡假設分別為65歲、70歲和75歲，其它使用參數呈現於表二。我們的敏感度分析以表一中前六個參數為主，分別以每5倍縮小或放大，計算新數值下的貸方可提供最大每年年金。特別一提的是，我們也利用表一參數，模擬100,000,000對本文模型下的房價和利率路徑，我們從這100,000,000對中，選出與實證資料間的平均絕對誤差(mean absolute error)最小的一對，圖二和圖三分別呈現平均誤差最小的模擬單



位化房價指數和模擬利率，以及歷史單位化房價指數和歷史利率的比較，資料期限為2013年7月至2021年6月共96筆。這對路徑的平均絕對誤差約為0.59%，表示本文模型確實成功呈現出歷史資料。



圖二 模擬單位化房價指數與單位化歷史房價指數之比較



圖三 模擬利率與歷史利率之比較

首先表三到表八皆呈現，男性借款人所能領取的最大每年年金皆高於女性借款人，其原因為男性平均餘命低於女性。另外，在相同性別下，起始借款年齡較低者，貸方所能提供的每年最大年金也較低，其原因為女性借款人平均餘命較長。表三呈現了在不同年齡和性別下，值對貸方所提供的最大每年年金影響。根據表一，利率均數水準在 $\theta = 0.0040$ 左右，雖然

利率均數回歸速度 $\kappa = 0.0894$ 並未呈現利率快速回到均數水準的現象，但長期下來，利率會維持在低水準狀態。另一方面，因為 $\mu = 0.0211$ 高於利率均數水準，由式(5)可知，房價每期的平均報酬率有較高機會上升。因此，在 $\lambda$ 值越高時，平均房價上升速度越快，使得貸方有較大動機提供更高的最大每年年金。另外，藉由計算割線斜率發現，若 $\lambda$ 值較低時，年金變化較小。

表三 不同年齡和房價報酬率對利率敏感度(- $\lambda$ )下，可提供給各性別借款人的最大每年年金(單位：元)

年齡	$\lambda$	最大每年年金(男)	最大每年年金(女)
65	0.0962	397,985	283,786
	0.4810	435,130	326,120
	2.4052	722,881	605,128
70	0.0962	411,367	325,526
	0.4810	471,293	362,442
	2.4052	764,981	647,130
75	0.0962	461,921	372,185
	0.4810	502,494	410,425
	2.4052	811,407	705,000

表四呈現 $\mu$ 值對貸方提供最大每年年金的影響，在 $\lambda$ 值為正下，由於 $\theta$ 為利率均數水準， $\mu - \theta$ 相當於長期後房價平均報酬率的均數水準。由表四發現，在不同借方年齡和性別下， $\mu$ 值的大小與最大每年年金呈現正相關。並且，藉由計算割線斜率發現，在 $\mu$ 值越小時，最大每年年金下降速度越快。由於 $\lambda = 2.4052$ 為正且較大，在值較大且高於利率均數水準 $\theta = 0.0040$ 時，每期房價平均報酬率為上升，因此表四中，在 $\mu = 0.0211$ 時，最大每年年金遠高於其它兩個 $\mu$ 值下所得到的最大每年年金。綜合表三和表四結果，在利率長期維持較低水準下，因房價平均上成長較快，貸方所提供每年年金也應較高。

表四 不同年齡和房價報酬率與利率線性關係參數( $\mu$ )下，可提供給各性別借款人的最大每年年金(單位：元)

年齡	$\mu$	最大每年年金(男)	最大每年年金(女)
65	0.0009	304,860	212,900
	0.0044	347,518	251,107
	0.0211	722,881	605,128
70	0.0009	335,852	242,785
	0.0044	377,429	280,712
	0.0211	764,981	647,130
75	0.0009	364,346	285,704
	0.0044	403,718	322,653
	0.0211	811,407	705,000

表五呈現房價波動度的影響，我們發現在波動度足夠低時，貸方可提供最大每年年金並未與房價波動度有明顯關係。而在房價波動度足夠大時，貸方可提供最大每年年金則降低。其可能原因如下：在房價波動度過低時，不確定性因素對房價影響甚小，房價主要受到平均報酬率影響。另一方面，在房價波動度足夠高時，房價可能變動至更高或更低的價值。若房價上升至更高的價值，則借方繼承人有較大機會償還貸款，即貸方獲得貸款利息。另一方面，若房價降至更低價值，則借方有較大機會放棄繼承，即貸方得到價值較低的房產，此時有較高機會無法彌補貸出之金額總額。因此綜合以上分析，在房價波動度較高時，貸方無意願提高年金。

表五 不同年齡和房價波動度( $\sigma$ )值下，可提供給各性別借款人的最大每年年金(單位：元)

年齡	$\sigma$	最大每年年金(男)	最大每年年金(女)
65	0.0024	748,219	622,564
	0.0119	722,881	605,128
	0.0594	645,138	553,383
70	0.0024	783,281	672,427
	0.0119	764,981	647,130
	0.0594	682,579	590,994
75	0.0024	817,525	723,480
	0.0119	811,407	705,000
	0.0594	720,488	638,783

我們現在分析利率過程的參數對最大每年年金的影響。首先表六呈現在不同 $\kappa$ 值下，不同年齡和不同性別借款人所能領取最大每年年金。從表六中發現，越大的 $\kappa$ 值使得每年最大年金越高。由於 $\kappa$ 值為利率均數回歸速度，因此在較大的 $\kappa$ 值，利率會較快速變動至均數水準 $\theta = 0.0040$ 。由於模型其它參數呈現在利率介於0.4%至2.11%時，平均房價上升且平均利率下降，因此房價在高 $\kappa$ 值下會快速上升，進而提高貸方提供較高年金的動機。然而，根據表六， $\kappa$ 值在足夠大後，對最大每年年金的影響趨緩。在表七方面，我們發現若利率均數水準上升，則貸方所提供之最大每年年金下降。其原因如下：根據表一參數，較高的利率均數水準使平均房價產生上升趨緩甚至下降的現象，因此降低貸方提供高年金的意願。甚至在 $\theta = 0.0933 > \mu = 0.0211$ 時，貸方僅提供相當低的最大每年年金。

表六 不同年齡和利率均數回歸速度( $\kappa$ )下，提供給各性別借款人的最大每年年金(單位：元)

年齡	$\kappa$	最大每年年金(男)	最大每年年金(女)
65	0.0894	722,881	605,128
	0.4470	782,177	657,366
	2.2348	786,945	670,192
70	0.0894	764,981	647,130
	0.4470	827,398	707,498
	2.2348	835,748	710,098
75	0.0894	811,407	705,000
	0.4470	869,818	760,114
	2.2348	880,916	774,087

表七 不同年齡和利率均數( $\theta$ )值下，可提供給各性別借款人的最大每年年金(單位：元)

年齡	$\theta$	最大每年年金(男)	最大每年年金(女)
65	0.0040	722,881	605,128
	0.0199	495,678	369,293
	0.0933	83,406	26,413
70	0.0040	764,981	647,130
	0.0199	537,079	400,610
	0.0933	101,504	37,645
75	0.0040	811,407	705,000
	0.0199	580,674	471,057
	0.0933	119,974	56,975

最後，表八呈現利率波動大小對貸方提供最大每年年金的影響。與房價波動度相似，我們發現在較高的利率波動下，貸方提供高年金的意願較低。以下為可能原因：高利率出現機會因高波動而增加，由表一參數，平均房價會因高利率而上升趨緩，使房產繼承人放棄繼承可能性較高，進而增加貸方可能損失。另一方面，雖然高波動也增加低利率出現機會，使平均房價上升較快。但此時房產繼承人可能選擇償還貸款。由於我們假設貸款利率與利率之間的利差為常數，貸方所得貸款利息在此情況下也較低。綜合以上分析，貸方並無意願提高最大每年年金。

綜合表三至表八之結果，我們可歸納出下列結論：在均數回歸速度方面，利率均數回歸參數 $\kappa$ 對年金變動影響較小。另外，在當前利率偏離房價平均報酬率和利率線性關係參數 $\mu$ 或是利率均數水準 $\theta$ 時，最大每年年金變動較大。例如在表四和表七中，當參數 $\mu$ 和利率均數差距較大時，即 $\mu = 0.0211$ 或 $\theta = 0.0933$ ，最大每年年金與其它的结果更明顯不同。更進一步推測，若參數 $\mu$ 與利率均數偏離較大時，房價平均報酬率和利率關係參數 $\lambda$ 將會使最大每年年金有更明顯變化，其原因為平均房價上升或下降更快速。最後，在波動程度方面，房價的波動

表八 不同年齡和利率波動參數( $\eta$ )值下，可提供給各性別借款人的最大每年年金(單位：元)

年齡	$\eta$	最大每年年金(男)	最大每年年金(女)
65	0.0010	722,881	605,128
	0.0050	696,916	579,566
	0.0251	307,387	224,665
70	0.0010	764,981	647,130
	0.0050	748,538	612,776
	0.0251	349,957	274,910
75	0.0010	811,407	705,000
	0.0050	801,594	647,626
	0.0251	357,625	310,243

度對最大每年年金影響較小，而利率的波動程度對最大每年年金影響則較明顯。因此從表三至表八的敏感度分析結果可推論，房價平均報酬率和利率關係、利率均數以及利率的波動程度，對RM的年金影響不可忽略。延續上述觀察，在 $\lambda > 0$ 之下，參數 $\mu$ 、利率均數、當前利率三者大小關係對最大每年年金之影響如下：在 $\mu > r(t) > \theta$ 時，平均房價呈現上升，而平均利率呈現下降，此時最大每年年金較高。另一方面，在 $\mu < r(t) < \theta$ 時，平均房價和平均利率則分別為下降和上升，此時最大每年年金較低。而當前的實證資料為前者情況，因此在表四和表七中皆對應最高的最大每年年金之狀況。

## 五、結論

在過去的RM定價文獻中，不乏利用加入房價和利率之間關係的模型進行定價或年金計算。然而，大部分模型在呈現兩者關係時，主要利用兩者不確定性之間的相關性。這樣的方式，在房價與利率之間關係較明顯時，或許較難捕抓到其關係。我們利用Yilmaz & Selcuk-Kestel(2018)的房價與利率模型，假設房價的瞬間報酬率與利率有關，並在這樣的模型下進行RM年金的估算。本文討論的RM為固定年金，並且借方繼承人可選擇償還貸款以繼承房產，或是放棄繼承由貸方取得房產。由於模型的複雜度，我們利用最大熵原則結合蒙地卡羅法，求解風險中立機率，並在利用貸方的期望損益下，估算貸方所能提供的最大每年年金。我們最後利用實證資料對模型進行參數校準，並藉由調整參數大小執行敏感度分析。

由於本文所使用的模型假設平均房價報酬率和利率相關，因此與大部分模型不同之處，在於房價和利率之間的關係並未呈現固定的相關性。房價和利率之關係，由當前利率大小所決定。部分文獻指出房價與利率為負相關，而有些文獻則提出相反結果，本文模型皆能同時納入兩種現象。而實證資料對模型進行參數校準後發現，除了本文模型確實有捕抓到該組資料趨勢外，也顯示房價平均報酬率與利率確實有不可忽視之關係。我們最後將重要結果歸納如下：

1. 在房價平均報酬率與利率之線性關係為負斜率時，即，若參數高於當前利率，且利率均數低於當前利率時，平均房價上升速度較快且平均利率下降，使得貸方願意提供較高年金。另一

方面，若參數低於當前利率，且利率均數高於當前利率時，則呈現相反狀況。而參數之值越高會使得此現象更明顯。而本文使用實證資料所得為前者，因此長期趨勢下，房價平均上為持續上漲。

2. 利率波動程度是制定RM年金不可忽視因素之一，此發現與Lee et al.(2012)不同。該文獻發現房價波動對RM年金影響較大，推測原因是其模型的房價平均報酬率並未直接受到利率影響，而是在定價RM時與利率均數有關。因此在風險中利機率觀點下，若利率均數低時，房價平均成長率偏低，造成房價波動影響較大。
3. 若以用本文的實證資料以及幾何布朗運動模擬房價，或是如Lee et al.(2012)之模型，在風險中立機率下房價平均報酬率與無風險年利率或利率均數相同。在當前低利率時代，可能使得RM價值被低估，造成最大每年年金過低，此對RM的推廣可能造成阻礙。

綜合上述三點，建議在制定RM年金時，應考慮房價平均報酬率與利率關係、利率均數、利率的波動程度等因素，以得到適當的年金設定。另一方面，未來的研究方向，可使用更合適的模型，取代式(1)和式(2)。

## 註 釋

註1：金融監督管理委員會銀行局網址：<https://www.banking.gov.tw/ch/home.jsp?id=497&parentpath=0,8,489,496>

註2：清華安富房價指數網址：<https://www.houseplus.tw/report>

註3：中央銀行網址：<https://cpx.cbc.gov.tw/Range/RangeSelect?pxfilename=EG2WM01.px>

## 參考文獻

### 中文部分

王文楷

2019 〈不動產逆向抵押貸款評價與提前解約之分析〉《住宅學報》28(2)：63-80。

Wang, W.-K.

2019 “Analyzing the Pricing and Termination of Reverse Mortgages,” *Journal of Housing Studies*. 28(2): 63-80.

王健安、張金鶚

2016 〈現行所謂「公益版」不動產逆向抵押貸款之設計提供多少的「社會福利」效果？〉《住宅學報》25(1)：37-75。

Wang, C.-A. & C.-O. Chang

2016 “How Much Does the Current Design of Reverse Mortgage in Taiwan Supplement the Social-Welfare Effect?,” *Journal of Housing Studies*. 25(1): 37-75.

吳明哲

2018 〈以房養老市場投資需求因素之研究—新均衡理論與模糊分析階層程序法之應用〉《住宅學報》27(1)：47-77。

Wu, M.-C.

2018 “A Study on the Investment Demand Factors in the Housing Endowment Market - An Application of New Equilibrium Theory and the Fuzzy Analytic Hierarchical Process,” *Journal of Housing Studies*. 27(1): 47-77.

林左裕

2011 〈逆向房屋抵押貸款在臺灣推行之需求分析〉《住宅學報》20(1)：109-125。

Lin, T.

2011 “The Analysis of Demand for the Reverse Mortgage Program in Taiwan,” *Journal of Housing Studies*. 20(1): 109-125.

陳勤明、洪志興、李宜熹

2017 〈我國不動產逆向抵押貸款評價〉《住宅學報》26(1)：85-100。

Chen, C. M., C. H. Hung & Y. H. Lee

2017 “The Valuation of Reverse Mortgage in Taiwan,” *Journal of Housing Studies*. 26(1): 85-100.

### 英文部分

Bardhan, A., R. Karapandza & B. Urosevic

2006 “Valuing Mortgage Insurance Contracts in Emerging Market Economics,” *Journal of Real Estate Finance and Economics*. 32(1): 9-20.

Black, F. & M. Scholes

1973 “The Pricing of Options and Corporate Liability,” *The Journal of Political Economy*. 81(3): 637-654.



Cho, D., K. Hanewald & M. Sherris

2015 “Risk Analysis for Reverse Mortgages with Different Payout Designs,” *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance, De Gruyter*. 9(1): 77-105.

Eerola, E. & T. Lyyikinen

2015 “On the Role of Public Price Information in Housing Markets,” *Regional Science and Urban Economics*. 53: 74-84.

Gallin, J.

2006 “The Long-run Relationship between House Prices and Income: Evidence from Local Housing Markets,” *Real Estate Economics*. 34: 417-438.

Girsanov, I. V.

1960 “On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures,” *Theory of Probability and Its Applications*. 5(3): 285-301.

Gompertz, B.

1825 “On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies,” *London Philosophical Transactions Series I*. 115: 513-583.

Hanck, C. & J. Prser

2020 “House Prices and Interest Rates: Bayesian Evidence from Germany,” *Applied Economics*. 52(28): 3073-3089.

Hsu, Y.-H.

2017 “Population Aging, Labor Force Participation, and Economic Growth,” *Journal of Business Economic Policy*. 4(1): 119-129.

Huang, W.-H., Y.-J. Lin & H.-F. Lee

2019 “Impact of Population and Workforce Aging on Economic Growth: Case Study of Taiwan,” *Sustainability*. 11(22), 6301: doi:10.3390/su11226301.

Kogure, A. & Y. Kurachi

2010 “A Bayesian Approach to Pricing Longevity Risk Based on Risk-Neutral Predictive Distributions,” *Insurance: Mathematics and Economics*. 46: 162-172.

Lee, R. D. & L. R. Carter

1992 “Modeling and Forecasting US Mortality,” *Journal of the American Statistical Association*. 87(419): 659-675.

Lee, Y. T., C. W. Wang & H. C. Huang

2012 “On the Valuation of Reverse Mortgage with Regular Tenure Payments,” *Insurance: Mathematics and Economics*. 51(2): 430-441.

Li, J.

2010 “Pricing Longevity Risk with the Parametric Bootstrap: A Maximum Entropy Approach,” *Insurance: Mathematics and Economics*. 47: 176-186.

Li, J., A. Kogure & J. Liu

2019 “Multivariate Risk-Neutral Pricing of Reverse Mortgages under the Bayesian Framework,” *Risk*. 7(1), 11: doi: 10.3390/risks7010011.

Maplezzi, S.

1999 “A Simple Error Correlation Model of House Prices,” *Journal of Housing Economics*. 8: 27-62.

Shao, A. W., K. Hanewald & M. Sherris

2015 “Reverse Mortgage Pricing and Risk Analysis Allowing for Idiosyncratic House Price Risk and Longevity Risk,” *Insurance: Mathematics and Economics*. 63: 76-90.

Shi, S., J.-B. Jou & D. Tripe

2014 “Can Interest Rates Really Control House Prices? Effectiveness and Implications for Macroprudential Policy,” *Journal of Banking Finance*. 47: 15-28.

Tse, Y. K.

1995 “Modelling Reverse Mortgages,” *Asia Pacific Journal of Management*. 12(2): 79-95.

Wang, S. S.

2000 “A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risk,” *The Journal of Risk and Insurance*. 67(1): 15-36.

Wang, L., E. A. Valdez & J. Piggott

2007 “Securitization of Longevity Risk in Reverse Mortgages,” *SSRN Working Paper*.

Yilmaz, B. & S. Selcuk-Kestel

2018 “A Stochastic Approach to Model Housing Markets: The US Housing Market Case,” *Numerical Algebra, Control Optimization*. 8(4): 481-492.

附錄：模型參數說明

表九 模型參數說明

參數	說 明
$x(t)$	$t$ 時房價
$r(t)$	$t$ 時利率
$\lambda$	$-\lambda$ 為瞬間房價報酬率平均對利率敏感程度
$\mu$	$\lambda\mu$ 為瞬間房價報酬率平均對利率線性關係截距
$\sigma$	房價波動度
$\kappa$	利率均數回歸速度
$\theta$	利率均數水準
$\eta$	利率波動參數，與波動大小為正向關係
$\rho$	房價隨機性與利率隨機性之相關係數
$\delta$	房產折舊率
$\varepsilon$	離散化連續模型所使用時間間隔
$p(t)$	房價為 $x$ 時的機率
$q(x)$	房價為 $x$ 時的風險中立機率
$t_M$	生物最大年齡
$\tilde{q}_m$	存活至 $t_m$ 且於該時間點死亡之機率

